DE INFINITIS
INFINITORUM,
ET
INFINITE PARVORUM
ORDINIBUS
DISQUISITIO GEOMETRICA

In qua, variis utriusque generis gradibus demonstratis, tum Methodi Infinitesimalis fundamenta ostenduntur, tum præcipuè PLUSQUAM INFINITA *spatia hyperbolica VVallisii, adversus nuperrimos eorundem impugnatores, vindicantur.*

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO CREMONENSI

S. Theol. Doct. In Pisana Universitate Publ. Phil. Profess. ac Magni Ducis Etruriæ Theologo, & Mathematico, è Regia Societate.

PISIS, MDCCX.

Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiepisch.
De Superiorum Licentia.

IN OPERIS,

Et Auctoris Laudem.

ODE.

Reſolve nexus, tolle repagula,
Adſtricta certo limite Quantitas,
Quæ Te coarctant terminorum
Contere liberior catenas:

Attende vaſtos, quos tibi nunc ſinus
Contracta nullis finibus Area
Recludit, immenſis datura
Planitiem ſpatiis capacem.

Quondam proterva fronte quibuslibet
Geometrarum niſibus obſtitit,
Proportionis, Calculique
Impatiens tolerare frænum;

Sed, Arte GRANDI, jam nihil intereſt,
Seu limes arctas ambiat undique
Extenſiones, ſive nullam
Obtineant ſpatia ampla metam.

Parent iiſdem Legibus omnia,
Progreſſus idem, par ratio datur,
Reſpectus unus ſingulorum,
Maxima quo minimis cohærent.

Magis ſtupendum eſt, quòd ſimilis tenor
Proportionum regnat in omnibus
Vel ſummè, & infinitè parvis
Particulis, quibus aucta creſcit,

Dato minori tempore quolibet,
Ex ordinatæ fluxibus Area;
Sed amplius miranda longè
Partibus his elementa rurſus

Minora, & iſtis quæ ſimili modo
Adhuc minores particulæ fluunt,
Nec limitem Natura novit,
Lumen ut Angligenum notavit.

Non

Non dispar ordo per similes gradus
Deducit Infinita prioribus
Majora semper, queis deinceps
Agglomerat spatia ampliora.

Hæc VVellis inter novit Hyperbolas,
Ad altiores quando potentias
Assurgit applicata, plusquàm.
Fine superficiem carentem

Complexa quidquid sivè Parentius
Contra reclamet, seu Varignonius,
Quorum cavillos elevasti
Docti Operis Faber, & Magister

Profundioris GRANDE Matheseos,
Qui mente vasta materiem quoque
Excellis infinitam, & ultra
Ingenii penetras volatu.

Seu Te Poesis sacrat Apollini,
Sive eruditis Historiis vacas,
Stylo aut perores eloquenti,
Dogmata seu reseras sacrata

Divina Legis, seu Penetralia
Naturæ aperto in Lumine collocas,
Seu jura pandis Machinarum,
Seu Numerû Harmonicû reformas,

Quæ sit vagorum aut Orbita Sydèrum,
Aut quæ Refracti sit Radii Via
Scrutaris, implexosque ductus,
Algebra quos speciosa signat;

Ubique summus, nec superabilis,
Sed unus ipsum Te superas, viam
Geometrarum quando calcas,
Tot variis methodis abundans.

Quæsita quis Te solvere promptior,
Curvasque fili flexilis in modum
Versare, mensuras ve certas
Adducere innumeris Figuris?

Id Viviani Ænigmata, id Hugeni
Probent Reperta, id Cycli, & Hyperbolę
Dimensio, id meta carentum
Innumerabilis Ordo monstrat.

Pręceptori olim suo, in Obsequii Argumentum, canebat
Carolus Taglini Medicinæ Doctor,
Publicus Philosophiæ in Pisano Lyceo
Professor.



Antonius Franchi delin. Theodorus Ver Cruyse sculps

NOBILISSIMO, ATQUE ERUDITISSIMO VIRO

HENRICO NEVVTON

POTENTISSIMÆ ANGLORUM REGINÆ,

Apud Regiam Celsitudinem COSMI III. M. *Ducis Etruriæ, nec non apud Serenissimam Genuensium Rempublicam,*

A B L E G A T O.

GUIDO GRANDUS FELICITATEM.

INcredibile sciendi desiderium, & inexplebilem, abstrusa quæque, magisque profunda rimandi, cupiditatem humanæ menti summus Naturę Conditor indidit, ut ad Auctoris sui cognitionem, non solùm officii sui debito sollicitante, gratique etiam amoris stimulo urgente, sed ampliùs objecti ipsius sublimitate ineffabili invitante, quodammodò excitaretur. Huic genio præ omnibus indulgentes, imò fræna laxantes, acutissimi, ac prestantissimi Mathematici, assiduo, & operoso studio in id maximè incubuerunt, ut ordine perspicuo rationis suæ vim gradatim promoventes, ex primis, planissimis, ac cuilibet facilè obviis veritatibus, quarum notitiam ab ipso Deo Opt. Max. nostris animis insertam accepimus, ad alias magis arduas detegendas sibi viam munirent, eo successu, quem pauci licèt pro merito intelligant, plerique tamen in dies sentiunt, & omnes jure mirantur. Nam, ut cetera omittam admiranda Theoremata, quæ se ab ipsis Geometriæ nascentis exordiis prodiderunt, velut de æqualibus triangulis, & parallelogrammis in eadem basi, atque in iisdem parallelis, ad quàmlibet dissitum intervallum obliquè excurrentibus: de spatiis quantumvis exiguis ad quamvis lineam applicandis, adeoque ad perimetrum majo-

* rem

rem quolibet dato redigendis &c. quæ nunc, ut nugas, & crepundia ætatis illius despicimus: manet adhuc inconcussa adversus omnem reluctantis imaginationis conatum, adversus inanes Scepticorum cavillationes, & Pseudophilosophorum impetus, priscis olim temporibus demonstrata, cujusvis magnitudinis infinita Divisibilitas: manet tam certa, & evidens, quam adhuc intellectui nostro incomprehensibilis, quæ ante omnem hominum memoriam olim detecta fuit, nonnullarum quantitatum Incommensurabilitas, quam siquis ignoraret, hunc non hominem, sed pecudem potius dicendum Plato censebat: manet adhuc numquam non celebranda, æque ac semper stupenda illa Asymptotorum affectio, quam, adolescente jam Geometria, Conici Scriptores deprehenderunt, nunc autem Mathematici recentiores, non ad unam, aut alteram curvam, Hyperbolam scilicet Apollonii, & Conchoidem Nicomedis, dumtaxat restringi, sed innumeris prorsus novis lineis facillimæ descriptionis, nonnullis etiam antiquis eadem lege continuatis, ut Nicostrati Quadratici, & Dioclis Cissoidi, convenire demonstrarunt. Verùm hæc nulla sunt, si cum illa felici non minùs, quam audaci Geometriæ, virilitatem suam jam adeptæ, aggressione conferantur, qua scilicet innumeros terminos in unam summam finitam colligere, immensæ longitudinis solida, & superficies, terminatæ, ac undique circumscriptæ sui generis areæ coæquare, infinitarum quantitatum proportiones, & gradus distinguere, & infinitè parva magnitudinum elementa reperire, atque in varias classes distribuere docuit. Neque verò ad sterilem, & otiosam dumtaxat speculationem hæc pertinere, non etiã externis hominum usibus, quibus civilis vita maximè indiget, inservire quis arbitretur: nulla quippe adeò abstracta, & ab omnis materiæ commercio remota cognitio in Geometricis assignari potest, cui vel nunc, vel aliquando, fructus aliquis ex his, quæ apud vulgus in pretio esse solent, non sit referendus; sive inde per se ipsum pendeat, sive mediis aliis notitiis ejusdem, aut alterius Scientiæ, quam prior illa cognitio perfecerit. Profundioribus utique Geometriæ speculationibus, & abstrusioribus Analyticæ Calculis, tum Mechanicam, tum Opticam, tum Astronomiam, tum Nauticam, tum Geographiam, tum Architecturam, ac ceteras denique Scientias, & Artes, Reipublicæ commodis, & utilitatibus proficientes, auctas hodie, locupletatas, & ad faciliorem usum [illegible] accedimus, novitate semper incrementis, superius

tio-

CIRCULO UNIVERSITATIS
INTERMINATO,
INCIRCUMSCRIPTO,
CUJUS CENTRUM UBIQUE EST;
CIRCUMFERENTIA NULLIBI,

INFINITO

OMNIUM INFINITORUM,
ET PLUSQUAM INFINITORUM

MAXIMO,

CUJUS MAGNITUDINIS NON EST FINIS,
SAPIENTIÆ NON EST NUMERUS,
BONITATIS INFINITUS EST THESAURUS.
QUOD
SUÆ INFINITATIS VESTIGIA
CREATURIS IMPRESSERIT,

HOMI-

HOMINIQUE AD IMAGINEM SUAM FACTO

INFINITI PERSCRUTANDI CAPACEM MENTEM DEDERIT,

AC SUI IPSIUS,

IN ÆTERNO BEATITUDINIS LUMINE,

FACIE AD FACIEM, ALIQUANDO CONTEMPLANDI,

SPEM FECERIT, GRATIAM OBTULERIT, SORTEM PROMISERIT.

GRATI ANIMI ERGO,

OMNIUM OPERUM AUCTORI

EXIGUAM HANC OPELLAM

DE INFINITIS INFINITORUM,

INFINITEQUE PARVORUM ORDINIBUS

GUIDO GRANDUS

HOMINUM MINIMUS, MONACHORUM ULTIMUS,

SED INNUMERIS TANTÆ MAJESTATIS BENEFICIIS

ADSTRICTISSIMUS,

HUMILLIME OFFERT,

DAT, DICAT, CONSECRATQUE.

IN OPE-

DEO

VERITATIS,

LUMINUM PATRI,

SCIENTIARUM DOMINO,

GEOMETRIÆ PRÆSIDI,

BONORUM OMNIUM LARGITORI

ÆTERNO, IMMENSO, IMMORTALI,

OMNIPOTENTI,

INEFFABILI,
INCOMPREHENSIBILI,
INCOMPARABILI,
UNIVERSORUM
ARCHITECTO, CONDITORI, CONSERVATORI
BENEFICENTISSIMO,
IN ÆTERNUM, ET ULTRA REGNANTI.
QUI EST
SUPER OMNIA, INFRA OMNIA, CIRCUM OMNIA,
INTRA OMNIA, EXTRA OMNIA,
IN OMNIBUS,
UBIQUE PRÆSENTI, SED INACCESSIBILI,
PER CUNCTA DIFFUSO, SED INDIVISIBILI,
OMNIA MOVENTI, SED IMMOBILI,
PRIMO, ET ULTIMO
RERUM OMNIUM PRINCIPIO, ET FINI,
IN MINIMIS MAXIMO, IN MAXIMIS SUMMO,

CIR-

tiorum Mathematicorum beneficio, magis ac magis in dies perficiendas speramus. Quocirca summa sollicitudine omnino curandum est, ut profundiores Geometrarum Theoriæ, quas perse jucundissimas, & de universo hominum genere tam benè merentes experimur, assiduè promoveantur, habitoque inter veras, & (siquæ irrepserint) falsas delectu, his confutatis confirmentur illæ, atque ab objectis fortasse scrupulis vindicentur. Hinc, cùm Clarissimi, inter præcipuos inclytæ Nationis tuæ Mathematicos, Joannis VVallisii PLUSQUAM-INFINITA spatia, quæ primus ipse inter hyperbolas infinitas altioris ordinis, summa cum omnium admiratione, detexit, à nonnullis Regię Parisiensis Academiæ Geometris nuper in dubium vocari, tam apertè rejici animadverterem, operæ pretium facturum me existimavi, si rem totam [quæ maximi est in scientiis nostris momenti, ob connexionem, quam cum methodo recentiorum Analystarum Scientia hæc Infiniti sortitur] iterum examini subiicerem, & ad lydium Geometriæ lapidem exigerem, de tam celebri controversia deliberaturus: cùmque VVallisii vestri partibus multiplex ab ipsa veritate suffragium accedere deprehendissem, irrogatam Viro gravissimo injuriam propulsandam, injustam immortali ejus Nomini labem abstergendam, ejusque doctrinam ab omni fallaciæ suspicione hoc libello purgandam, Te potissimùm hortatore, constitui. Novos addidit operi stimulos ipsamet Illustrissima Regalis Societas, à Serenissimo Rege Carolo II. ad naturales Scientias promovendas fundata, dum me, obscurum, ac peregrinum hominem, inter socios suos ultrò conscribendum censuit, measque, in Armachani Præsulis systema sonorum, speculationes, Illustrissimo Præside Isaac Newtono Equite aurato, Mathematicorum nostri sęculi Principe, necnon Doctissimo Haulæo, in Universitate Oxoniensi Professore Astronomiæ Saviliano, summè probantibus, ejusdem Academię actis inseri, & inter philosophicas Transactiones edi mandavit: cui quidem honori, ut aliqua ex parte me gratum ostenderem, nihil opportunius, & huic proposito accomodatius occurrit, quàm si prelaudati VVallisii, qui Regiam ipsam Societatem tantoperè illustravit, famam ab illata calumnia defendendam hac Geometrica Disquisitione susciperem, quam, meo nomine, eidem Amplissimo Academicorum Cetui communicandam, Tibi offero, Vir Illustrissime, atque Eruditissime, ut mei simul erga Te obsequii monumentum aliquod apud posteros

ma-

maneat, nulla temporis injuria intercidendum. Nihil attinet, ut in Virtutum tuarum, hoc quæcunque venerationis teſtimonium ſuo veluti jure exigentium, uberrimum campum excurrere orationem meam permittam, cum ipſo etenim præſentis Tractatus titulo ampliſſimi hujus argumenti fecunditas decertaret, meque in ſpatia PLUSQUAM-INFINITA laudum tuarum abduceret; ac dolorem denique noſtrum, ex imminentis jacturæ timore conceptum refricaret, dùm à Prudentiſſima Regina, meritorum tuorum ſat conſcia, eximiis honoribus auctus in Patriam revocaris, omnium, quibus Eruditio, Doctrina, Facundia, Elegantia tua, cum ſumma Humanitate conjuncta, perſpecta eſt, amorem, tecum, & deſideria ſimul aſportaturus. Unum igitur ſupereſt, ut Te, qua licet fiducia, ſupplex exorem, ad libellum hunc benigna, qua ſoles, fronte excipiendum, ejuſque Auctori, quibus ipſum dignaris, benevolentiæ, & gratiæ tuæ officia jugiter continuanda. Vale.

Piſis, Pridie Kal. Februarii MDCCX.

DE OPERIS ARGUMENTO

Poeticum Præludium.

QUidquid finitum tranſcendit, [1] & undique certo
Se circumſcribi limite non patitur,
Viſum erat et noſtram pariter tranſcendere mentem,
Vireſque humani luſerat ingenii.
Auſus [2] *Ariſtoteles*, auſus (3) *Plato*, cuncta *Sophorum*
Turba [4] hoc immenſum eſt traiicere auſa vadum.

Cum

NOTÆ) *Ut lucem aliquam materiæ per ſe obſcuriſſimæ, ac Muſis penè intractabili, conciliarem, explanationem ejus aliquam in his notis ſubdere viſum fuit, & Amicorum conſilia perſuaſere: qui ſecus faciendum duxerit, eas pro non adjectis habeat, prætereatque.* Itaque (1) Infinitum *cujuſvis generis hic intelligo, ejuſque Hiſtoriam penè univerſam hoc carmine complector. Illud, tametſi noſtrum captum excedere videretur, explicandum ſibi ſumpſit* (2) Ariſtoteles *in lib. 3. phyſ. aſſerens text. 24. ejus notitiam ad Phyſicam pertinere, & text. 25. ipſius naturam ab omnibus, qui accuratè philoſophiam tradiderant, conſideratam fuiſſe affirmans, atque in primis à* (3) Platone, *quem text. 27. narrat*, duo Infinita *poſuiſſe*, Magnum, & Parvum: *quaſi recentioribus Mathematicis præluſerit, qui* infinitè magna, & infinitè parva *excogitarunt. Omnes denique* Philoſophi Scholaſtici (4) *de Infinito diſputare*

Cum ſcopulis (5) luctata diù, ſævisque procellis,
Irruit adverſis obvia turbinibus;
Sed tumida imbelles laſſavit ut unda lacertos,
Viribus effractis, vertere cogit iter.
Qui contra obſiſtunt, hos gurgitis ampla vorago,
Syrtibus allidens oſſa, caputque, rapit;
At pauci hinc reduces, tenuere ubi littoris oram,
Inſtabiles, greſſu ſæpe labante, ruunt;
Nec niſi tricarum (6) malè olentes denique ſpumas,
Inflatis buccis; quiſquiliaſque vomunt.
Non numerare ſinus, non explorare profundum
Plumbo, non fines poſſe notare datum eſt.
Subrogat hiſce ſuos divina Matheſis (7) alumnos,
Et deſperatum fortior urget opus.
Tuque Syracuſiæ tutela, & gloria gentis
Antevolas alios, ingenioſe [8] *Senex*.
Aſſuetus vaſtam numero comprendere (9) arenam,
Non modò quæ ſiculo littore ſparſa jacet,
Sed maris, & terræ, ſtellarum, & totius orbis
Implerent quotquot grana minuta ſinum,
Quamvis erat ſpatio contermina ſine carenti
Congeries, paucis non referenda notis:
Quàm facilè & pelagus, quo extenſio limitis expers
Clauditur, ingreſſus ducis in alta ratem!

Non

tare aggreſſi, ob graviſſimas, quibus involvitur, difficultates (5) hic allegoricè expreſſas, quid profecerint, & quos fructus (6) demum inde retulerint, notius eſt, quàm hic exponi apertius conveniat. Mathematici (7) ergo Philoſophis ſubſtituti ad Infiniti contemplationem, primuſque [8] Archimedes *Syracuſius hoc vadum tentavit.*(9) *qui multitudinem arenularum, totam firmamenti etiam Pythagoricè capacitatem implentium, in libro, cui titulus eſt* Arenarius, *computavit, ut Geloni Regi probaret,*

Non brevia, & cautes, non acroceraunia terrent,
Non venti, aut nymbi, aut monſtra morantur iter.
Sed noſtris ſubducta oculis vix inclyta puppis,
Metam omnem excedens, invia quæque ſecat,
Cùm ſubitò emergit ſcopulorum immenſa propago,
Quadrupla queis ratio, (10) forma tricuſpis erat.
Hic magnus Geometra jubet conſiſtere: & ultra
Quid properamus? ait: Sat mihi cuncta patent.
Jam video innumeros, quotquot ſine fine quadrantes
Succreſcunt primo, limitem habere ſui;
Nam triquetri ſeries erit omnis [11] epitrita primi:
Inde parabolici eſt area [12] nota loci
Portum igitur victor repetit, radioque magiſtro,
Tanti operis certa in littore ſigna notat.
Proximus huic, longo ſed temporis intervallo,
Ingreditur vaſtum jam (13) *Galilæus* iter;
Expedienſque Tubum (14), quo tot portenta retexit,
Uno Infinitum proſpicit intuitu.
Scrutatur numeros, (15) quotquot mens fingere poſſet,
Illorum varios comparat inde gradus.
Radiceſque [16] omnes, quadrata, cuboſque recenſens,
Nunc totidem (17), nunc ſe plura videre putat;
Nam

vet, numerum arenarum Syracuſii littoris infinitum non eſſe. (10) Porrò infinitam ſeriem triangulorum in quadrupla ratione decreſcentium, quam ſeries tricuſpidum ſcopulorum, eandem rationem obſervantium, hoc loco exprimit, conſiderat Archimedes lib. de Quadr. Parabola prop. XXIII. eamque eſſe oſtendit [11] ſeſquitertiam primi trianguli, inde (12) quadraturam parabolæ determinans, eo quod in ſimilem triangulorum, quadrupla ratione decreſcentium, infinitam ſeriem reſolvatur. (13) Poſt XVIII. ſæcula Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus Academicus Lynceus, M. D. Etbruriæ Philoſophus et Mathematicus (14) optici tubi, quo tam multa priſcis incognita ſpectacula in cœlo detexit, inventione celeberrimus (15) omnes poſſibiles numeros infinitos contemplatus eſt dial. 1. de nova Scientia (16) quærens, num plures in illis ſint radices, an quadrata, vel cubi. Nam (17) ex una parte totidem videntur,

 ex

Nam cuivis numero (18) ſuus eſt cubus, atque quadratũ
Cuique ſuum parili lege referre potes;
Rara ſed in numeris [19] quadrorum turma, cuborum
Rarior occurſus, non totidem eſſe ſinit.
Ergo anceps animi Vir Lynceus hæret, (20) in Uno
Quærat, an in Multis quod ſine fine vocant;
Unum etenim [21] ſibimet radix, cubus, atq; quadratũ,
Claudit inexauſto nomina cuncta ſinu.
Ambigit et titulos (22) *Æquum*, *Majuſque*, *Minuſque*
Immenſo in numero, aut mole, tenere locum.
Hos tamen evadit ſcopulos qui [23] poſt Galilæi
Signa, brevi cymba, ponè legebat iter,
Ex inſectilibus (24) componere cuncta elementis
Arte (25) *Cavallerius* nobiliore potens.
Huic licèt [26] innumeris ſint corpora conſita planis,
Plana infinitis conſita lineolis,
Ipſe figurarum [27] plana omnia comparat, omnem
Rectam hujus, rectis omnibus alterius;
Quin et ubi innumeras (28) aperit progreſſio partes,
Continuo ſeriem diminuente logo,

Non

ex alia non totidem: [18] *primum ſuadet perpetua correſpondentia cujuſvis radicis cum ſuo quadrato vel cubo,* (19) *ſecundum evincit obſervatio, quòd omnes numeri ſunt radices, non omnes verò quadrati ſunt, aut cubici, quorum tanto major eſt infrequentia, quantò magis ab unitate ad altiores numeros aſcendimus: Exhinc dubitat Galilæus* (20) *annon, potiuſquàm in Multitudine, quærenda ſit Infiniti eſſentia in Unitate* (21) *quæ ſibimet quadratum, cubus, et qualibet ſui ipſius poteſtas eſt. Imò ſuſpicatur* (22) *titulos æqualis, & inæqualis non habere locum, ubi ſermo ſit de Infinitis.* (23) *Poſt veſtigia Galilæi, qui methodi Indiviſibilium ſpecimen dederat Dial. 1. cit, ubi de cylindro per hemiſpherium excavato, et Dial. 3. in comparatione ſpatii motu accelerato, & æquabili eodem tempore confecti, veniſſe viſus eſt* (24) *Indiviſibilium Geometriæ Auctor* (25) Bonaventura Cavallerius *Mediolanenſis, qui licèt* [26] *ſolida ex infinitis ſuperficiebus, & ſuperficies ex infinitis lineis contextas ſupponat, tamen* [27] *docet* omnia indiviſibilia *unius figuræ omnibus alterius conferre, omnia ſimul plana in ſolidis, et omnes lineas in ſuperficiebus comparans. Inſuper* (28) *Infinitos terminos continuò decreſcentes, nedum in ratione quadrupla*

[29] *ut*

Non modò cū quadrupla est (29) Siculi ut doctrina Ma-
Prodidit, at quęvis regnet in his ratio, [gistri
Ad certos semper docuit restringere fines, (30)
Notaque congeries integra facta fuit.
Flexilibus rectis (31) id *Torricellius* (32), inde
Gregorius [33] variis exposuere modis.
Quodque fidē superat, solidum (34] prior ille rotundū,
Infinita acies cujus hyperbolica est,
Mole sua ostendit finito æquale (35) cylindro;
Qui à centro ad solidi pertinet usque basim.
Inde alii (36) innumeras planas, solidasque figuras
[*Slusius* (37) hos inter, (38) *Craigius*, (39) *Hugenius*]
Quamvis in immensum quęvis se extenderet axem,
Ad certi spatii signa venire jubent.

Rur-

(29) *ut dudum Archimedes ostendit loc. cit. sed in qualibet geometrica progressione proce-derent, idem Cavallerius (apud* Torricell. *De Dimens. Parab. Schol post Lemm. XXVII.) in unam summam (30) colligere docuit, quam demonstrat æqualem tertiæ proportio-nali post primam differentiam, & primam magnitudinem. Id verò (31) per flexilinea rectarum sibi alternatim parallellarum triangulo inscripta elegantius probavit idem* (32) Evangelista Torricellius *Faventinus M. D. Ethruriæ Mathematicus sub an-num MDCXLIV. quod et. aliis modis exibuit Gregorius à S. Vincentio Soc. Jesu an-no MDCXLVII. lib. 2. De Circuli Quadratura. (34) Jucundum verò, ac penè tum-temporis incredibile spectaculum Geometris præbuit Torricellius, Solidum nempe acu-tum hyperbolicum infinitè longum, ab hyperbola circa asymptoton conversa genitum, quod (35) ostendit æquale finito cylindro eidem basi adiacenti, suaque altitudine ad-usque centrum hyperbolæ extenso, quem gignit rectangulum asymptotico spatio inscri-ptum in eadem conversione. (36) Alii deinceps, post Torricellium, figuras infinitè longas, tam planas, quàm solidas metiri ausi sunt, quos longum esset enumerare, Ut sunt* Isáac Barrovius *in lect. Geom.* Joannes Ceva *in Geometria Motus*, Petrus Nicolas *Soc. Jesu In Exercit. Geometr.* Antonius Lalovera *Soc. Jesu De Cycloide*, Petrus Fermat *Opusc. posthum.* Jacobus Gregorius *in Geometria part. univers.* Da-vid Gregorius *in Exerc. Geom.* Georgius Cheynæus *in Method. Fluxionum &c. tres autem solos carminis opportunitas exprimere concessit*. (37) Renatum Franciscum Slusium *in Miscellan.* (38) Joannem Craigium *in method. quadrandi figur.* (39) Chri-stianum Hugenium, *a quo et Cissoidis Diocleæ dimensionem habemus apud VVal-lisium in Schol. prop. XXIX. cap. V. Mechanicæ, & Spatii Logarithmici mensuram ad calcem Diatribæ de causa gravit. indicatam, quam nos in Hugenianis, cum ex-tensione ad Logarithmicas altiorum graduum, & multis id genus aliis, demonstra-*

vimus

Rurſus arithmeticas ſeries quoque *Mengolus* (40) offert,
Quarum finis abeſt, integra ſumma datur;
Unum ubi dividitur (41) cunctis quadriſve, cubiſve,
Omnibus aut planis, aut ſolidis numeris;
Quamlibet excedit ſed tunc progreſſio metam,
Cū ratio (42) harmonica eſt, quę ſua membra ſecat.
Altiùs at penetrans pelagi tam grandis abyſſum
Auctor inexhauſtæ [43] *VVallis* Arithmeticæ
Ex Infinitis [43] PLUSQUAM-INFINITA recenſet,
Et graduum ſeries ſupputat innumeras.
Naſcitur hinc varius rerum ordo (45) fine carentum,
Horrêt inacceſſas mens ſtupefacta vias.
Nec ſatis: in ſummè exiguis diſcrimina (46) *Nevtoni*
Fermè eadem reperit, (47) *Leibnitiuſque* ſimul;
Ille

nimus. (40) *Simile quid in fractionibus numericis infinitis exhibuit* Petrus Mengolus *Bononienſis in Quadraturis arithmeticis, earum ſummam accuratè colligens, & finitam eſſe oſtendens,* (41) *quoties unitas denominatur, vel omnibus numeris quadratis, ut* $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{25}$ $\frac{1}{36}$ *&c.* [*quę ſeries minor eſt* $\frac{3}{4}$) *vel omnibus cubis, ut* $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{64}$ *&c.* (*qua minor invenitur* $\frac{3}{8}$) *vel omnibus planis numeris, ex ductu duorum quorumvis proximorum genitis, ut* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ *&c.* (*quæ præciſe æquatur* 1.) *vel omnibus Solidis ex ductu quorumvis trium ſibi ſuccedentium productis, ut* $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ *&c.* (*quæ præcisè adæquat* $\frac{1}{4}$) *At verò infinitam eſſe ſummam oſtendens,* [42] *ubi progreſſione harmonica fractiones decreſcunt, ut* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ *&c. At* (43) Joannes VVallis *Geom. Profeſſor Savilianus* Oxonii *in Arithmetica Infinitorum* (44) *Spatia* Pluſquam-Infinita *etiam commemorat prop.* 104. & 105. *quæ ſcilicet infinities ſuperant areas jam infinitas; unde* (45) *patet, eodem jure ſpatia rurſus infinities majora iiſdemmet pluſquam infinitis excogitari poſſe, & adhuc alia, a quibus hęc ipſa rurſus infinities ſuperentur, & ita deinceps ſine limite ad alia altioris ordinis infinita progrediendo. Similiter* (46) Iſaac Nevton Eques Auratus *eundem progreſſum in* Infinitè parvis *proponit, quibus alia infinities minora ſint, atque ita porrò,* neque novit natura limitem, *ut ipſe ait in Schol. Lemm. XI. ſuorum Principiorum* Mathem. *Philoſ. Et ſimile quid* (47) Godefridus Guiglielmus
Leib-

Ille tamen fluxus [48] vocat, & momenta fluentum
Quantorum punctis (49) indicat impositis;
Quartam hic (50) litterulam adiiciens ad symbola rerū,
Queis differre videt proxima quæque, notat.
Naturæ hinc secreta patent (51) mysteria utrique,
Majus et à parvis maxima lumen habent.
Namque Catenarum [52] flexus, & Elasmatis (53) arcū,
Quemve sinum pandant (54) turgida Vela notis:
Semita quæ gravium sit [55] Isochrona sponte cadentū,
Et [56] Brachystochronas discimus inde vias.
Prodit & hinc (57) varii moderatrix Regula motus,
Et vim (58) centrifugā (59) centripetamq; regens:
Nec latet illa dies, (60) breviora crepuscula cui sunt',
Nec, minimū obsistat cui mare, [61] forma ratis;
Cur-

Leibnitzius *excogitavit, cum hoc discrimine, quod Newton quantitates infinitè exiguas* (48) Fluxiones *vocat, seu* Momenta, *aut momentanea incrementa, vel decrementa quantitatum, quas* Fluentes, *idest continua successione crescentes, aut decrescentes concipit: easque fluxiones* (49) *puncto ad rei fluentis symbolum superimposito designat, ut si fluens sit* x *vel* y, *fluxiones earum sint* $\dot{x}$ & $\dot{y}$. *At Leibnitzius* (50) *addit litteram quartam, seu characteristicam* d, *nam has particulas infinitè parvas* Differentias *vocat, itaque ipsarum* x, & y *differentiæ notantur per* d x, & d y; *quin et ulteriores fluxionum fluxiones duplici puncto imposito per* $\ddot{x}$ & $\ddot{y}$ *indicat ille, per geminatum* d *exprimit iste, ut* d d x, d d y; *atque ita multiplicando punctum, vel characteristicam cætera quantitates infinitè parva altiorum graduum denotantur* (51) *Multa hinc Physicomathematica Problemata, Veterum Methodo impervia, soluta sunt: Nempe* (52) *Curva* Catenaria, *seu funicularia, quam catena suspensa emulantur,* (53) *Curva* Ellastica *quam lamina Elaterum se evoluentium designant,* (54) *Curva* Velaria, *in quam tumida vela sinuantur,* (55) *Curva* Isochrona *per quam grave descendens æqualiter, æquali tempore, ad datum punctum accedit,* (56) *Curva* Brachystochrona, *sive celerrimi descensus gravium ex dato puncto ad datum punctum; Item* (57) Regulæ motuum, *utcunque vario velocitatis incremento, aut decremento procedentium,* (58) *Leges quoque* Vis centrifugæ, *hoc est conatus à centro recedendi in qualibet curva, quam mobile describat,* & (59) Vis centripetæ *sive impetus urgentis mobile in aliquod centrum, quacunque proportione variari supponatur in accessu, aut recessu à tali centro (quarum virium utramque generali nomine* Virium centralium *comprehendit Cl. Varignonius in Actis Academia Regia, ubi præclara multa de his, & de motuum Regulis ostendit)* [60] *Diei quoque brevissimi, seu* Minimi crepusculi *determinata, itemque* (61) *figura Navi-*
gii

Curvarumque licet (62) menſuras noſſe, (63) recurſus,
(64) Flexus, (65) Cōtactus, (66) Oſcula, (67) Centra, (68) Focos.
Signaque in his radii quę lambant (69) cauſtica, dum lux
Sive refracta ſubit, ſive reflexa redit;
Et quacunque baſi ſubnixa figura rotetur,
Quas gignat punctum mobile [70] Cycloidas;
Tum quæ ſe evoluens, [71] poſt ſe veſtigia linquat,
Dùm curva amplexus deſerit ipſa ſuos:
Et quidquid (72) *Bernulliadum* par nobile fratrum,
Aut [73] *Hoſpitalius*, (74) *Tſchyrnbuſius*, [75] *Facius*
Inſeruere tuis, celeberrima (76) *Lypſia*, in Actis,
Dum methodi illuſtrant dogmata prima novæ.
Limitis expertum quantorum Analyſta (77) repugnat
Sed *Nievuentitius*, nec ſatis iſta probat;
Omne eteni augmentū [78] et graduū diſcrimina quęq;
Ex Infinito reiicienda putat;

Re-

gii Minimæ reſiſtentiæ *inter omnia, quæ in eodem fluido moveantur* (62) Curvarum rectificatio, *& arearum ab iis comprehenſarum dimenſio* (63) Puncta reverſionum, *in quibus curva aliquot retorquentur in eaſdem partes, unde venerant* (64) Flexus contrarii, *ubi è concavis convexe fiunt* (65) Tangentes *cujuſvis curva imaginabilis* [66] Circuli oſculantes, *ideſt maximi, qui ad datum punctum curva inſcribi poſſint.* (67) Centra *varia, ex quibus curvę deſcribi poſſunt ope filorum,* (68) Foci *tum indiviſibiles, tum lineares earundem curvarum.* (69) Curvę Cauſticæ *ſive ex reflexione, ſive ex refractione radiorum lucis progenita, quas ſcilicet iidem radii perpetuò tangunt.* (70) Cycloides *orta ex quavis curva ſuper quamlibet aliam rotata; Item* (71) *Curvę* ex Evolutione *fili aliam curvam circumplectentis, more Hugeniano, generata &c.* [72] Joannes, *&* Jacobus Bernoullii *fratres, ille Chroninga, hic Baſilea Mathem. Profeſſores longè clariſſimi.* (73) Guglielmus Franciſcus Marchio de Hoſpitalio *inſignis Geometra, qui methodum infinitè parvorum preclara Analyſi* Des infiniment petits *illuſtravit.* (74) Ehrenfridus V Valtherus de Tſchyrnhauſen *celeberrimus Mathematicus, auctor Medicinę mentis & corporis, atque ingentium Vitrorum Cauſticorum inventor.* [75] D. Facio De Duilliers (76) Acta Eruditorum Lypſiæ *ab anno 1682. & deinceps publicata, in quibus alia complura huc pertinentia occurrunt, quæ, brevitati ſtudentes, omittimus, cùm hactenus adducta, commendando methodi hujus pretio, abundè ſufficiant* (77) *At* Bernardus Nieuventiit *in Analyſi Infinitorum anno MDCVC. edita hunc ulteriorem in infinitè parva progreſſum reiicit & improbat.* (78) *Nam Infinito quidpiam addi poſſe negat.*

Rerum etiá minima (79) admittit, quæ prima vocantur,
[80] Decrementa sed his ulteriora negat.
At tu, (81) Antennoreæ mox Palladis ornamentum,
[82] *Hermanne* huic causæ porrigis ultor opem,
Et repetita (83) Viri eximii argumenta refellens,
Magna et Parva [84] omnes cogis habere gradus.
Sola (85) *Varignonii* PLUSQUAM-INFINITA moratur,
Quæ spatiis tribuit *VVallis* hyperbolicis.
Ille etenim [86] absurdú quiddã, atque affine Chymeræ
Sub tam magnifica voce latere putat.
Tu quoque derides nomen tam grande (87) *Parenti*,
Et Geometrarum è classe [88] valere jubes.
Si tamen aspiret cœptis fortuna secundis,
Et regat hæc trepidum lubrica arena pedem,
Dogmata [89] *VVallisii* per me inconcussa manebunt,
Stabit hyperbolicis [90] multiplus ordo locis.
Parvorum tamen omne genus, [91] variasque deinceps
Magnorum classes, ante referre juvat, Fon-

gat, ac quadratum, cubum, cæterosque gradus Infiniti numeri respuit (79) *unde, & consequenter, primas quidem differentias, seu partes infinitesimas primi gradus admittit, sed* (80) *ulteriorem differentiationem, idest secundas, ac tertias differentias procul ablegandas censet. At* (81) *qui nunc Urbis Patavinæ ab Antennore fundata* Cathedram Mathematicam *moderatur* (82) Jacobus Hermannus *Basileensis, variis geometricis Speciminibus in Actis Lypsiæ, & in Ephemeridibus Parisiensibus, suo merito, celebratus, calculi infinitesimalis causam ultus est, &* [83] *libro, adversus Considerationes secundas* Nievventytii, *anno* 1700 *Basileæ promulgato,* (84) *ad omnem dignitatem evehi posse tum infinitè magnas, tum infinitè parvas quantitates ostendit.* (85) *Scrupulum tamen iniecere* D. Varignonio *Spatia* Plusquam-Infinita, *quę VVallisius inter hyperbolas altioris gradus agnovit; hęc siquidem* (86) *nescioquid contradictionis involvere Varignonius credidit:* Un plusque infini, *inquit in monumentis Acad. Regiæ anni* 1706. m'a toujour paru' renfermer une contradiction (87) *Sed et* D. Parent *part.* 3. *Disquis. Phys. & Mathem novam hanc* Plusquam Infinitorum *denominationem à Geometris exulare cupit!* cela etant, adieu nos plus qu' Infinis. *Deo tamen auspice* (80) *Doctrinam VVallisii hoc in proposito vindicandam suscipiemus, &* [00] *multiplicem illum Infinitorum ordinem in ipsis hyperbolis, quas VVallisius consideravit, necessariò admittendum demonstrabimus: atque hic pręcipuus erit nostra hujus tractationis scopus,* (91) *tametsi, ad uberiorem scientiam, multò generaliùs hoc ipsum argumentum* De Infinitis Infinitorum, & Infinitè

 Par-

Fontibus (92) è propriis fluat ut tam nobile Verum,
Atque haustu recreet liberiore sitim.
Hinc lux [93] uberior, vis firmior, amplior usus
Accedit methodis, præsidiumque novis.
Nec jam despicies, (94) quòd tangens suppleat arcus,
Aut curvæ areolæ Zonula recta vicem,
Et laterum innumera serie (95) polygonon habebis,
Flexa ubi continuum linea ducit iter:
Plurimaque (96) in Physicis rerum miracula disces,
Invenient certam jam paradoxa fidem:
Totũ Animal minimi ut tegit ovi angusta (97) cicatrix,
Integra ut exiguo in semine Planta latet.
Explicat implicitas (98) tantùm generatio partes,
Auctio distendit, perficit, ornat opus:
Nec, quæ succedunt priscis [99] nova semina, terrent,
Dum renovant fructus tempus in omne suos.
Nam summe exiguis (100) sine fine minora, per omnes,
Ad sensum veniunt, ducta subinde gradus.
Increpat insueti sed Apollo carminis ausum,
Nostra jubens, posita, sumere signa, chely.

Parvorum Ordinibus *versare, (92) & ipsos hujus doctrinæ fontes aperire curabimus, (93) ad novas methodos illustrandas, & confirmandas. (94) Licebit deinceps arcum infinitè parvum pro recta ejus tangente sumere, & curvarũ (95) quadrilinea infinitè parvæ latitudinis pro rectangulis inscriptis, aut circumscriptis computare; ipsasque curvas pro (96) polygonis infinitorum numero laterum summè exiguorum habere (ut Galilæus, ante omnes de Circulo hoc proposuit). Multa etiã (97) quæ in Philosophia paradoxa videbantur, credibilia fient, ut Animalis in Ovo, & Plantæ in Semine præexistentia cum omnibus organicis partibus, quæ (98) evolvantur dumtaxat per generationem, & per nutritionem amplientur. (99) Nec terrere nos debet seminum, & fructuum, quovis anno prodeuntium, multiplicitas: Nam (100) admissis variis infinitè parvorum ordinibus, concipere possumus, omnia in semine contenta ex uno ad alium gradum subinde promoveri; ut nempe dum ad sensibilem magnitudinem perveniunt quæ erant in primo gradu infinitæ parvitatis, succedant ad hunc primum gradum quæ erant in secundo, & ad secundũ quæ erant in tertio, & sic deinceps. Quod valet etiam de Plantulis, quæ in seminulis primo semine contentis latent cum suis infinities adhuc minoribus seminulis, continentibus plantulas alias infinities minores, atque ita in infinitum.*

LX-

EXPOSITIO CONTROVERSIÆ

Circa magnitudines Plusquam - infinitas, quæ præsentis tractatus editioni præbuit occasionem.

Celeberrima est spatiorum plusquam infinitorum, quæ in hyperbolis altiorum graduum supra Apollonianam, ad alteram asymptoton remanent, consideratio. Hanc denominationem illis inditam voluit ante omnes alios Cl. VVallisius *Arithmet. Infinit. prop.* 104. 105. *&c. & in Mechan. cap.* 4. *prop.* 7. Quod ipsum & nos, *Hugenian. cap.* 4. *n.* 12. ab eodem VVallisio optimè observatum tradidimus; & potest ex his, quæ *ibidem cap.* 8. *n.* 11. generatim ostendimus, facillimè demonstrari.

Nimirum ex ibi dictis patet, quòd ſi inter aſymptotos A C, C B ſit hyperbola Apolloniana A g D G B, cujus nempe ea ſit proprietas, ut ratio quarumvis ordinatarum D K, G E, ſit æqualis rationi abſciſſarum à centro reciprocè ſumptarum E C, C K, erit ſpatium poſt quamlibet ordinatam D K, aſymptoto K B, & curva D G B indefinitè productis interjectum, magnitudinis abſolutè infinitæ, quippe quæ ad inſcriptum parallelogrammum C K D N erit ut 1 ad 0, quę ratio eſt infinitè magna, ſeu major qualibet aſſignabili.



Sin autem talis hyperbola A h l D L H B iiſdem aſymptotis per idem punctum D inſcribatur, cujus ordinatarum D K, H E ratio ſit duplicata rationis abſciſſarum reciprocè ſumptarum E C, C K: nempe cujus ordinatæ ſint ut quadrata dictarum diſtantiarū reciprocè accepta: tunc ſpatium poſt ordinatam K D, aſymptoto K B, et curva D H B ad partes B infinitè productis interiectum, præcisè æquabitur eidem parallelogrammo C K D N, quippe ad illud erit ut 1 ad 1. Et ſi ordinatarum ratio reciprocæ rationis abſciſſarum triplicata foret, adeòut illæ harum cubis è contrario reſponderent, haberetur hyperbolicum ſpatium poſt ordinatam K D ſimiliter ad partes B in infinitùm excurrens, ſubduplū ejuſdem parallelogrammi C K D N. Atque ubi ordinatarum ratio reciprocæ abſciſſarum rationis quadruplicata foret, prodiret ſpatium illud hyperbolicum ſubtriplum hujus parallelogrammi, atque ita in reliquis procedendo.

Adeo

Adeout generatim si ratio ordinatarum sit ad reciprocam rationem abscissarum, ut x ad y (vel, quod eòdem redit, si ordinatarum potestates, ab exponente y denominatæ, respondeant reciprocè potestatibus abscissarum ab exponente x indicatis) semper spatium hyperbolicum post unam ordinatam, asymptoto et curvæ in infinitum productis interiectum, reperiatur esse ad inscriptum parallelogrammum, ut y ad $x - y$: Sic enim in prima Hyperbola Apolloniana, ubi utraque ratio, tam ordinatarum, quã reciproca abscissarum, æquatur, adeoque y ad x est ut 1 ad 1, erit spatium hyperbolicum ad parallelogrammum, ut 1 ad $1 - 1$, sive ut 1 ad 0. In secunda hyperbola, in qua prima ratio est duplicata secundæ, fiet x ad y ut 2 ad 1, & proinde ratio spatii hyperbolici ad parallelogrammum, ut 1 ad $2 - 1$ sive ut 1 ad 1. Ubi verò prima ratio sit triplicata secundæ, adeò ut y manente 1, x evadat 3, erit spatium ad parallelogrammum ut 1 ad $3 - 1$, sive ut 1 ad 2, atque ita deinceps.

Adeòque cùm hæc lex semper obtineat, utpotè fundata in ratione subtangentium, quæ semper sunt ad distantias ordinatarum a centro, ut exponens potestatis ordinatarum y ad exponentem potestatis abscissarum x (sive ut harum ratio ad rationem illarum) per dicta Hugenianorum *cap. 7. n. 9.* consequens est, ut in hyperbolis AfDFB, si viceversa abscissarum EC, CK ratio duplicata, aut triplicata fuerit reciprocæ rationis ordinatarum KD, EF, utpotè si harum quadrata, vel cubi &c. sint reciprocè ut distantiæ earundem à communi centro (quod in iisdemmet hyperbolis supra consideratis evenit, si modò ad alteram asymptoton referantur, ut distantiæ in ordinatas, & ordinatæ in distantias mutentur, adeoque y ad x sit ut 2 ad 1, vel ut 3 ad 1, &c. etiam ratio hyperbolici spatii post unam ex dictis ordinatis juxta suam asymptoton, cum ipsa curva, infinitè productam extensi, ad inscriptum

paral-

parallelogrammum erit, ut y ad $x - y$ hoc est ut 2 ad 1 − 2 (nempe ut 2 ad − 1, sive ut 1 ad $-\frac{1}{2}$); vel ut 3 ad 1 − 3 (idest ut 3 ad − 2, sive ut 1 ad $-\frac{2}{3}$) & sic de aliis; quæ ratio cùm major sit ratione 1 ad o (ob consequens minus, quàm o) sitque 1 ad o ratio simpliciter infinita, constat majorem rationem spatiorum, de quibus loquimur, ad inscripta parallelogramma esse *plusquàm infinitam*; & ideò dicta spatia meritò à Cl. VVallisio *plusquaminfiniti* nomine fuisse appellata.

Nuperrimè tamen scrupulum super his in Gallia subortum intelleximus; Nam anno 1700 D. Carrè *in methodo mensura superficierum &c. sect.* 1. *coroll. prop.* 23. cùm intulisset, spatia hyperbolica, quorum index potestatis ordinatarum m sit minor unitate accepta pro exponente distantiarum a centro, esse *plusquam-infinita*: in margine monuit, se ita appellasse, ne à communi, & vulgari loquendi modo recederet, cæterùm à nonnemine opportunam rei huius explicationem propediem expectandam: *c' est pour parler le langage ordinaire, que je me sers du mot de* plus qu'infini. *Une personne doit nous donner au premier jour un èclaircissement sur cette matière.*

Tum anno 1705 D. Parent *in Disquisit. Phys. & Mathem. tom.* 1. *part.* 3. *pag.* 552. hunc ipsum locum D. Carrè ad censuram vocans, postquàm ejus calculum reformare aggressus est; nostrum hoc plusquam infinitorum genus, per jocum, valere jubet: *cela ètant, adieu nos plus qu' infinis:* & velut ægrè tulerit vel denominationem illam, quasi *vulgò usurpatam*, à D. Carrè indicari, quam, utcunque magnificam, novam tamen, aut saltem inutilem esse sibi persuadet, hæc subdit: *Mais quelle utilitè tirerons nous de ces grands & nouveaux termes, qu' on nous donne pour des termes triviaux?*

Tan-

Tandem anno 1706 Cl. Varignonius expressè VVallisium hac in re sibi confutandum proposuit *in Monum. Phys. & Mathem. Regiæ Academiæ Parisiensis die tertia Februarii ejusdem anni*: Postquàm enim retulisset, laudatum Scriptorem Anglum, dum spatia, quæ hyperbolis, & ipsarum asymptotis interiiciuntur, ad mensuram vocat, ob dimensionem quorundam ex his spatiis per negativas magnitudines expressam, eadem *plusquàm infinita* credidisse, subdit: „ sibi magnitudinem plusquam infinitam nescio quid cnotradictionis semper includere visam fuisse; unde ad inquirendam mysterii hujus enodationem excitatum esse: atque omne mysterium evanescere debere confidit, ubi ostenderit, Authoris hujus expressionem pro spatio plusquam infinito, ne quidem spatio simpliciter utcunque infinito competere, sed tantùm finito, quod quidem spatium verè infinitum ad alteram partem residuum compleat; adeòque hyperbolas cum asymptotis suis non comprehendere spatia plusquam infinita, ut Author ille contendebat: atque hanc demum esse explicationem illam, quam D. Carrè in suo Libro de Calculo integrali super hac materia proditurum (ante sex annos scilicet) promiserat „ En ejus verba, uti habentur in dictis Academiæ monumentis anni 1706. *pag.* 15. editionis Amstelædamensis. *Monsieur VVallis cherchant la mesure des Espaces renfermez par des hyperboles, & leurs asymptotes, & aiant trouvè pour l'expression de quelques uns de ces Espaces des grandeurs negatives, a crù qu'ils ètoient plus qu'infinis. Mais comme un plus qu'infini m'a toùjour parù renfermer une contradiction, cela m'a dèterminè à chercher le dènouement de ce mystere, qui cessera d'en ètre un, dès que j'aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l'expression d'un Espace plus qu'infini, n'est pas mème celle d'un infini, mais seulement d un Espace fini, qui est à la veritè le complement d'un Espace infini; & qu'ainsi les hyperboles, & leurs asymptotes ne renferment point d'Espaces plus qu'in-*

qu' infinis, comme cet Auteur l'a pretendu. C'est là l'eclaircissement qui a ètè promis dans le Livre de M. Carrè sur le Calcul Integral.

Hinc post traditam doctrinam suam de quantitatibus negativis, non magnitudinem plusquam infinitam in hoc proposito denotantibus, sed prorsus finitam, ad partes tamen contrarias de more accipiendam, concludit; „ Tantum abesse, ut hyperbolæ altioris ordinis supra Apollonianam spatium plusquam infinitum comprehendant, quòd potius ipsius Apollonianæ hyperbolæ spatium censeri possit magis infinitum spatio ab aliis comprehenso; quippe illud ex utraque parte, hoc verò ab una dumtaxat parte infinitum deprehenditur „, ait enim: *D'où l'on voit que l'espace ACBGA* (hyperbolæ nimirum ordinariæ in superiori figura) *doit être infini de part & d'autre; & par consequent plus infini [pour ainsi dire] que les prècèdens ACBBFA, & ACBBHA* (aliarum nempe hyperbolarum) *qu' on viene de voir ne l'être, que par chacun un côtè. Dont il s'en faut bien qu' ils ne soient plus qu' infinis.*

Nos autem Cl. VVallisii doctrinam, & expressionem vindicantes, ostendemus, revera hyperbolas altioris ordinis supra Apollonianam, ex una parte licet finitum spatium comprehendant, ex alia tamen usqueadeò spatium plusquam infinitum continere, ut etiam infinities majus sit spatio ab Apolloniana hyperbola contento: adeòut spatium Apollonianæ hyperbolæ, licèt utraque ex parte jam infinitum, quantumvis adhuc multiplicatum, semper minus ostendatur quovis spatio ad unam asymptoti partem ab altioribus illis hyperbolis contento, & qualibet etiam aliquota ipsius parte: ac demum ita comparari debere spatium infinitum hyperbolæ Apollonianæ ad ea spatia, quæ ab altioribus comprehenduntur, ut quædam finita quantitas ad infinitam, vel ut 0 ad 1. Usque adeò verum est, spatia illa plusquam infinita censeri debere, & VVallisia-

nam

nam illam denominationem, velut optimo fundamento nixam subsistere, meritòque adhuc ab omnibus esse retinendam.

Enimverò hoc ipsum, quod nos de spatiis illis hyperbolicis demonstraturos recepimus, sufficere, atque illud unũ requiri, ut spatium quoddam plusquam infinitum habeatur, fassus est Auctor Historiæ ejusdem Academiæ Regiæ anni 1706 in hujusmet controversiæ enarratione, & Varignonianæ dissertationis recensione, optimè animadvertens: „ Plusquam infinitam non censeri magnitudinem, quæ alia infinita utcunque sit major, cùm infinitæ magnitudines, juxta quorumvis numerorum rationem, aliæ aliis majores, aut minores esse possint, absque eo quòd ordinem infinitorum excedant, perinde ac finitæ quantitates juxta quamvis rationem auctæ, vel imminutæ, finitorum ordinem non transcendunt; sed illas plusquam infinitas magnitudines demum censendas, quæ ab infinitorum ordine emergentes, ad ordinem superiorem fuerint elevatæ, ut accidit finitis magnitudinibus, ubi ad ordinem infinitorum transierint. „ En ipsa eloquentissima verba Historici prælaudati *pag.* 60. Batavæ editionis: *Car ce qu' on nomme ici plus qu' infini, ce n' est pas une grandeur infinie plus grande qu' une autre infinie: les grandeurs infinies peuvent être plus grandes ou plus petites les unes que les autres, selon tous les rapports possibles des nombres, & cela sans sortir de l' ordre de l' infini, de meme que les grandeurs finies ne sortent pas de l' ordre du fini pour varier entr' elles selon tous ces rapports. Mais ce qu' on entend par des grandeurs plus qu' infinies, ce sont des grandeurs qui etant sorties de l' ordre de l' infini doivent s' elever à un ordre superieur, comme sont les grandeurs finies lorsqu' elles passent à l' ordre de l' infini.*

Idipsum & Auctor Diarii Parisiensis *in suplemento ultimi Februarii* 1708, hanc historiam, & controversiam recensens, repetit totidem penè verbis: deinde adjicit „ Quòd si plus-

quàm infinitæ magnitudines admittantur, ordo quidam altior ipsomet infinito erit excogitandus, atque inducendum, non modò unum infinitum simpliciter alio majus, sed genus quoddam magnitudinum, quæ Infiniti ordinem prætergressæ ad superiorem alium ordinem eleventur „ *Si ce, qu' on appelle dans cet article* Grandeurs plus qu'infinies, *avoit lieu, il faudroit reconnoitre un ordre plus elevè que celui de l' infini, & admettre non pas simplement un infini plus grand qu' un autre, mais des Grandeurs sorties de l' ordre de l' infini, & elevèes à un ordre superieur*. Tum notabilem hanc animadversionem subiicit, qua „ non omnino reiiciendas plusquàm infinitas magnitudines (adeòque nullam contradictionem, qualem in ipsis Varignonius fingit, absolutè involvere) ex Geometriæ transcendentis principiis, varios infinitorum ordines agnoscentis, apertè innuit: verùm in hoc speciali proposito hyperbolarum VVallisii, omne plusquam infinitum jure à Varignonio reiici statuit, quippe illarum expressio à VVallisio adducta, ne quidem pro simpliciter infinito, (nedum non pro plusquam infinito) sed purè finito spatio fuerat accipienda „ *Quand les principes de la Geometrie transcendante ne permettroient pas de rejetter absolument l' idèe de differens ordres d' infinis, M. Varignon auroit toujours raison de la rejetter dans la question presente. En effet il fait voir, que ce que M. VVallis a pris pour l' expression d' un espace plus qu' infini, n' est pas même l' expression d' un espace infini; l' espace exprimè etant purement fini*.

Me igitur operæ pretium facturum existimavi, si rem ipsam altiùs repetens, varios tum Infinitorum, tum infinitè parvorum ordines, quos profundior Geometria, quæ nunc temporis in usu est, ac per infinitè exigua magnitudinum elementa procedere solet, ex omnium fermè Geometrarum, qui ejus principia degustaverint, confessione agnoscere necessariò debet, demonstrare, & quàm dilucidè fieri poterit, exponere aggrederer, speciatim verò Hyper-

perbolarum VVallisii *plusquam infinitarum* non unam, sed multiplicem purè geometricam demonstrationem in medium afferrem, quæ nullis Calculi ambagibus imponere cuiquam possit, nullisque cavillationum technis eludi: adeòut non magis excipere queat Varignonius, expressionem horum spatiorum invertendam, et ad aliam partem, negativo in positivum transeunte, ac plusquàm infinito in purè finitum converso, esse sumendam, quàm si contenderet, quæ de Triangulis ostendit Euclides, esse de Circulis, aut Parallelogrammis intelligenda.

Veniam, ut spero, dabit conatibus nostris Cl. Varignonius, cujus præclarissimæ famæ, quam sibi tot mechanicis, ac geometricis, & analyticis egregiis speciminibus, immortali planè memoria dignissimis, peperit, nihil idcircò detractum volo, dum Collegæ nostri VVallisii honorem, & Illustrissimæ Regiæ Societatis nostræ Decus, ac Veritatis ipsius pretium hac in parte vindicare contendo: simulque tum ipse, tum profundiores alii Geometræ permittent, ut me vel Tyronum captui accomodans, doctrinam hanc minutissimè exponam, ea ipsa, quæ tamquam vulgatissima habentur, ex suis velut principiis exactè demonstrans, ne quid fortassis obrepat, quod minùs assuetis ad hæc profundiora Matheseos mysteria mentibus ullam falsitatis suspicionem possit ingerere; liberum enim cuilibet futurum erit, ut ea quæ facillima, & sibi notissima sunt, statim transiliat, atque in his dumtaxat, quæ propositæ controversiæ punctū propiùs concernunt, examinandis, tempus insumat.

Hortandus interim mihi est Lector Geometra, ne inter inanes, ac nulli usui profuturas meditationes, nostram hanc de Natura Infiniti, variisque ejus classibus, quas pauci hactenus animadvertere, ac distinguere potuerunt, collocandam censeat; nam præter egregios fructus, quos probè instituta mens ex hujusmodi considerationibus ad Divinorum contemplationem sibi derivare facilè potest, qua-

tenus nihil æquè idoneum est in Dei Opt. Max. ejusque summarum perfectionum notitiam (quantùm naturæ viribus assequi datur) nos promovere, atque in ejus incomprehensibilis Sapientiæ, omnemque, vastam licèt, ac ultra quoslibet, terminos extensam ideam, immenso intervallo superantis Potentiæ admirationem inducere, ac seria Infinitorum discussio: præter hos, inquam, egregios sanè, ac præstantissimos fructus, aliosque non absimiles ad vitam rectè, moderatèque instituendam pertinentes, quibus vel solis quidquid ad Infiniti Naturam enucleandam, ejusque proprietates aperiendas collimat, satis commendaretur, innumera ex eodem hoc fonte in universam Mathematicam, & Philosophiam profluere emolumenta is unus diffiteri poterit, qui iisdem percipiendis impar extiterit; Nam, exempli causa, Circuli, & Hyperbolæ quadratura, quæ tot in diis tentata, quoslibet Geometrarum conatus per tam multa sæcula pertinaciter elusit, tandem ab infinita terminorum serie pendere deprehensa est, ut in nostro Libello *Quadratura Circuli, & Hyperb.* anno 1703 Pisis edito geometricè demonstravimus. Innumeri naturales effectus in Physica adhuc ignoti manent, quòd infinitam principiorum seriem, à qua fortasse dependent, ignoremus. Tota Geometria Infinitè parvorum methodo nunc perficitur, & in immensùm ultra fines à Veteribus constitutos ampliatur: perfectioni autem tam nobilis Scientiæ connecti et perfectionem Philosophiæ, atque hanc pari passu cum illa in dies promoveri, quis nesciat? Verùm hęc alibi fusiùs, & opportuniùs: ad rem ipsam veniamus.

DE

DE INFINITIS INFINITORUM, ET INFINITE PARVORUM ORDINIBUS.

DEFINITIO I.

RATIONES *assignabiles dicuntur, quibus æquales, aut quamlibuerit proximas, per positivos numeros, possumus exhibere.*

SCHOL. Comprehendit hæc definitio etiam rationes asymetrarum magnitudinum, ut diametri ad latus quadrati, vel lateris trianguli æquilateri ad ejus perpendiculum &c. quæ licèt numeris exprimi nequeant, ostenduntur tamen quibusdam numericis rationibus majores, quibusdam minores, adeòque intra certos limites continentur, intra quos etiam possumus propositæ rationi quamlibuerit proximam per numeros exhibere, juxta ea, quæ demonstravimus *in Hugenianis cap.* 3. *n.* 3.

DEFI-

DEFINITIO II.

Magnitudines absolutè Finitas voco, quas vulgò tractamus, quæque ad similem nobis notissimam quantitatem, in nostro saltem corpore determinandam, rationem assignabilem obtinent.

SCHOL. Quaslibet magnitudines digito, palmo, pede, vel ulna, nimirum humani corporis partibus, ad certam quamdam mediocrem quantitatem, inter tot varias, publica auctoritate, taxatis, metiri omnis natio consuevit: itaque eodem modo ad corporis nostri molem cætera corpora, ad nostrā superficiem cæteras superficies, ad nostram altitudinem cæteras lineas, ad angulum, quem altitudo nostra cum horizontali recta comprehendit, cæteros rectilineos angulos, ad nostrum pondus cæterarum rerum gravitates, ad nostram vim cæteras potentias, ad nostræ vocis tenorem cæteros sonos, atque ita de reliquis, referre non immeritò possumus, velut ad magis obviam, magis naturalem, nobisque notissimam mensuram, ad quam certè quælibet finitæ quantitates ejusdem generis, quas vulgò tractamus, assignabilem aliquam obtinent rationem.

DEFINITIO III.

Magnitudines absolutè Infinitas voco, quæ ad finitam quamlibet sui generis magnitudinem rationem habent majorem qualibet assignabili.

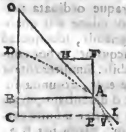
SCHOL. Non contendimus, talem aliquam magnitudinē reipsa existere, vel aliquando extituram, sed ipse progressus quantitatum, certa quadam lege, crescentium, menti nostræ occasionem præbet, illas sine limite augendas, & ultra quamvis datam magnitudinem ampliandas concipiendi, quarum itaque ratio ad quamlibet finitam sui generis quantitatem, major semper, & major evadat, quàm quælibet

libet ratio assignabilis: ita conica superficies, ejusque sectiones parabolicæ, & hyperbolicæ, suapte natura infinitæ sunt, quatenus semper augeri, extendique ulterius, adeòque omnem finitam superficiem superare concipi possunt; licèt interim quidquid ex illis determinatè acceperimus, semper nonisi finitum futurum sit, in eo autem dumtaxat, quod accipiendum superesset, tota Infinitas lateat. Neque enim fieri potest, ut magnitudo undique circumscripta, & limitata, pro absolutè infinita habeatur: quarè licèt parabolæ, exempli causa, axis in infinitùm protensus sit absolutè infinitus, non ideò concipi potest, velut longitudo binis punctis, quantumvis distantibus, intercepta, sed ex una dumtaxat sui parte, nempe ad punctum verticis, unde originem suam ducit, determinata, ad aliam verò partē termino, & fine carens, utpotè sine limite semper augenda.

DEFINITIO IV.

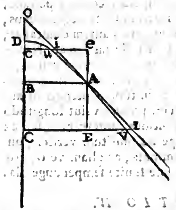
Magnitudines absolutè infinitè parvas intelligo illas, quæ ad finitam sui generis magnitudinem habent rationem minorem qualibet assignabili.

SCHOL. Has magnitudines infinitè parvas Cl. D Leibnitzius *Differentias*, vel Elementa variabilium quantitatū vocavit: Illustriss. Eques Nevvtonus *Fluxiones*, seu momentanea incrementa, aut decrementa magnitudinum, continuo quodam fluxu crescentium, aut decrescentium, antea appellaverat. Multis placet easdem *Infinitesimas* magnitudinū partes dicere; quæ ut intelligantur, concipiatur recta BA per axem DC curvæ DAV, sibimet parallela manens, moveri, atque interim continuò crescat, aut minuatur, prout opus est, ut



ad

ad curvæ perimetrum altero extremo pertingat; ducta ergo A E axi parallela, si imaginemur [licèt, ad confusionem vitandam, has aliquantulum dissitas figura exprimat] ordinatam B A venisse in situm, quàm maximè intelligere possimus, eidem proximum, & jam congruere rectę C V: ejus incrementũ, aut decrementũ V E erit differẽtia infinitè parva ordinatæ B A, similiterque arcus A V differentia erit infinitè parva curvæ D A V, itidemque erit B C differentia infinitè parva axis D B, nec non areola A B C V, duabus ordinatis infinitè proximis intercepta, dicetur differentia infinitè parva areæ D A B; manifestum enim est, posse concipi, ut tam prope accedant invicem ordinatæ B A, C V, ut ratio tam E V ad B A, quàm C B ad B D, nec non V A ad A D, & spatii A B C V ad A D B, minor evadat quavis proposita ratione assignabili; minuitur enim hoc continuo accessu ordinatarum A B, C V, quælibet ex dictis quantitatibus E V, C B, V A, A B C V in infinitum, ac tandem penitus evanescit, ubi utraque ordinata perfectè congruit; quare priùs oportet, ut minor fiat qualibet finita sui generis magnitudine assignabili, ideoque ad datum consequens rationem subinde acquirat, in hoc continuo fluxu, minorem qualibet assignabili. Similiter rotata curva D A V circa axem D C, ostenderetur, rotundæ superficiei per curvæ rotationem genitæ differentiam, ab arcu A V infinitè parvo procreatam, esse pariter infinitè parvam: nec non rotundi solidi portionem, planis per B A, & C V infinitè proximis æquidistanter ductis interceptam, esse infinitè pariter exiguam, &c. Cæ-



Cæterùm hìc pariter obſervandum eſt, nec magnitudines has infinitè parvas concipi debere, velut determinatas, aut determinabiles quaſdam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant; quaſcumque enim portiunculas linearum, ſuperficierum, aut corporum (itidemque virtutum, celeritatum, angulorum &c.) acceperimus, aut deſignaverimus, hæ ſemper reipſa finitæ erunt, non infinitè parvæ: itaque non ſunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coarctandæ, ſed concipiendę ſunt ex una dumtaxat parte, ad ſummùm, limitatæ (ut CB fixum terminum habet in B, VA fixam originem habet in A, area BAVC adiacet fixæ lineæ AB, & corpuſculum, ex illius converſione circa BC deſcriptum, adhæret fixo circulo radii BA) ex altera verò parte fixum limitem non habentes, ſed alteri extremo ſemper propiùs accedentem, ut continuo fluxu accedit punctum C ad B, & V ad A, & CV ad BA, intervallo utriſque interpoſito, infra quamlibet aſſignabilem magnitudinem, perpetuò decreſcente. Aut etiam utrumque extremum ſibi invicem accedere concipi poteſt, ut puncta E, V ſibi ſemper propiora fiunt, neutro fixam poſitionem ſervante, dum lineolam EV infinitè parvam intercipiunt. Unde hæ magnitudines ſemper ut decreſcentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent, ut ſuo, infra omnem aſſignabilem quantitatem, decremento, ſub ratione infinitè parvarum, ſive infiniteſimarum partium intelligi poſſint.

DEFINITIO V.

Duarum quarumlibet magnitudinum, ſi prima ad ſecundam habuerit rationem majorem qualibet aſſignabili, adeòque, convertendo, ſecunda ad primam ſit in minori ratione, quàm qualibet aſſignabilis, dicetur prima infinita reſpectu ſecundæ, ſive infinities maior illa: ſecunda verò infinitè parva reſpectu primæ, aut infinities minor eadem.

SCHOL. Hoc modo etiam finitæ magnitudines respectu quidem absolutè infinitarum erunt infinitè parvæ, at respectu earum, quæ sunt absolutè infinitè parvæ, erunt ipsæmet infinitæ; Quare patet, nomina hæc *Infiniti*, aut *Infinitè parvi*, relativa potius esse, quàm absoluta, licèt communi loquendi modo obsecundans, *in Defin. III. & IV.* absolutè acceperim hæc vocabula, quia tunc respectus saltem ad ordinarias finitas quantitates subintelligebatur; quemadmodum etiam *Magnum & Parvum* termini sunt semper relativi, sed quoties ad ordinariam, & magis communem alicujus generis mensuram referuntur, absolutè solent enunciari, magnus aut parvus homo, magnus aut parvus canis, magna vel parva domus, subintelligendo respectu hominis, canis, aut domus mediocris, & magis usitatæ quantitatis.

DEFINITIO VI.

Ejusdem inter se ordinis, aut gradus magnitudines sunt, cùm earum ratio est assignabilis: Cùm verò hujus ad illam major, aut illius ad hanc minor est ratio, quàm qualibet assignabilis, tunc gradus, aut ordinis hæc superioris, illa inferioris dicetur respectu alterius.

SCHOL. Hinc ex quantitatibus Infinitè parvis, aut Infinitis, vel Finitis, primæ inferioris gradus sunt respectu cæterarum, secundæ sunt ordinis superioris ad reliquas, tertiæ superioris quidem gradus aut ordinis respectu priorum, at inferioris respectu secundarum: inter se autè ejusdem ordinis aut gradus esse constat finitas quaslibet magnitudines. An verò magnitudines omnes absolutè infinitæ, vel infinitè parvæ semper ejusdem inter se ordinis censendæ sint, an potius diversi gradus in utroque hoc magnitudinum genere reperiri queant, id in præsenti disquisitione detegendum erit: Clarissimis viris *Newtono, Leibnitzio*, utrique

Ber-

Bernoullio, *Hospitalio*, *Hermanno*, ipsique etiam *Varignonio* sua constat diversitas ordinis in infinitè exiguis, quippe fluxionum fluxiones, & differentiarum differentias secundas, tertias, quartas &c. in Geometriam invexerunt, ut ex ipsorum monumentis passim liquet; *Bernardus* autem *Nievventytius* in sua *Analysi Infinitorum*, non esse ultra primas differentias progrediendum, pluribus contendit, adeòque infinitè parvas magnitudines ad eundem semper ordinem spectare arbitratur. Iisdem supra laudatis egregiis Viris (præter Varignonium & Nievventytium] placuisse, ut ordinis, & gradus diversitas etiam inter quantitates infinitè magnas admitteretur, ex eorum modis, & loquendi formulis patet, ut ex celebri Leibnitzii dicto, *Actor. Lypsiæ pag. 86. Et infiniti sunt gradus, tam infinitorum, quàm infinitè parvorum*; Idque VVallisii præsertim exemplo factum est, qui omnium primus spatia *Plusquàm infinita* in Hyperbolis altiorum graduum detexit: hæc enim nihil aliud sunt, ut videbimus, quàm infinitæ magnitudines superioris ordinis, quæ nimirum adhuc respectu quantitatum absolutè jam infinitarum sunt infinitæ, sive illis infinities majores, quemadmodum differentiæ secundæ, vel tertiæ Leibnitii sunt quantitates infinitè parvæ ordinis inferioris, sive infinities minores ipsismet primis differentiis, quæ jam absolutè erant infinitè exiguę. Et sanè, mirum est, Cl. Varignonium *in monum. Acad. Reg. anni* 1706 hęc VVallisii spatia *plusquam infinita*, velut contradictionem involuentia, reiicere, dum secundas, & tertias differentias, adeòque partes ipsismet infinitesimis infinitè minores [quę *plusquam infinitè parva* dici possent] tam frequenter admittit, ubi de viribus centralibus, de radiis osculi, aliisque similibus differit. Enimverò, nonne ipsę finitę quantitates infinities continent primas differentias, & hę rursus infinities continent secundas, secundæ autem tertias? ergo multitudo secundarum differentiarum in ipsamet finita magnitudine

est plusquam infinita, & tertiarum differentiarum multitudo in ipsis infinitesimis primi ordinis plusquam infinita est, infinities verò plusquam infinita in magnitudinibus finitis, ac multò magis in quantitatibus absolutè infinitis: adeò ut quævis magnitudo si continet infinitas numero primas differentias, utique contineat plusquam infinitas differentias secundas, & in altiori adhuc infinitatis gradu contineat differentias tertias; & in multò altiori quartas, atque ita deinceps. Quidquid id est, non abs re fuerit, hypotheticè saltem, hoc vocabulum interim definire, ut certa, & distincta controversę rei notio habeatur.

DEFINITIO VII.

Siquæ magnitudines infinities majores ostendantur aliis magnitudinibus jam absolutè infinitis, adeòque ordinis superioris ad ipsas probentur, illæ PLUSQUAM INFINITÆ poterunt appellari.

SCHOL. Hoc enim nomen, ipsis à VValisio quondam inditum, alii deinceps Clarissimi Geometræ retinuerunt, ut Renatus Franciscus Slusius, David Gregorius, Joannes Craigius, & inter Gallos, quibuscum nunc instituitur disputatio, celeberrimus Marchio Hospitalius *in Tractatu Analytico Sectionum Conicarum lib.* 5. *prop.* 14. *coroll.* 2. *n.* 3.

Fateor tamen, quodlibet infinitum posse adhuc *plusquam infinitum* censeri, quia cùm nullus sit minimus infiniti gradus, quolibet infinito proposito, semper aliud infinities minus reperiri potest, cujus respectu illud sit plusquam infinitum, ut constabit ex dicendis infra *prop.* 10, ubi ipsomet asymptotico spatio hyperbolæ Apollonianæ (cujus respectu VVallisius altiores hyperbolas plusquam infinitas censuit) aliam aream infinities minorem, licèt adhuc absolutè infinitam, invenimus, cujus respectu ipsamet ordinaria hyperbola spatium plusquam infinitum cum asymptoto continet.

PRO-

PROPOSITIO I.

Magnitudinum ejusdem ordinis A, & B, tam summa A†B, quàm differentia A−B (posito nempe, quòd A, juxta aliquam assignabilem inaequalitatis rationem, determinatè sit major, quàm B] ejusdem pariter cum alterutra ipsarum est ordinis.

Erit enim, *ex defin. 6*, A ad B in aliqua ratione assignabili, putà *m* ad *n*: quare & componendo A†B ad B, & dividendo A−B ad B, erit in ratione pariter assignabili, *m*†*n*, vel *m*−*n* ad *n*, ideoque, *ex eadem definitione*, tam A † B, quàm A−B ejusdem cum B, vel A, est ordinis. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM. Hinc finitum additum finito non facit infinitum: nec duæ, vel tres partes infinitè parvæ finitam magnitudinem aggregant: nec binæ, vel aliquot infinitæ quantitates ejusdem ordinis ullam magnitudinem plusquam infinitam supra talem ordinem efficiunt.

PROPOSITIO II.

Per quemlibet finitum numerum m *quævis magnitudo A multiplicetur, aut dividatur, tam productum* m *A, quàm quotiens* $\frac{A}{m}$, *intra eundem ordinem cum ipso A consistet.*

Nam, *ex praecedenti*, A † A † A † A &c quoties libuerit, ejusdem semper cum ipso A est ordinis; atqui multiplicatio, ut patet, non est nisi quædam repetita ejusdem quantitatis additio, ergo productum *m*A ejusdem ordinis erit cum ipso A. Simili ratione $\frac{A}{m}$, multiplicatum per *m*, in-

tra

tra eundem ordinem remanebit, sed tunc evadit ipsum A, itaque $\frac{A}{m}$ ejusdem est ordinis cum ipso A; quare &c.

COROLL. Hinc non potest juxta finitum numerum toties sumi quantitas infinitè parva, ut finitam quantitatem aliquando efficiat: idem dic de finita respectu infinitæ, ac de qualibet infinita respectu plusquam infinitæ: idemque vicissim de divisione, ex qua numquam magnitudo ad inferiorem ordinem deprimitur, dictum esto.

PROPOSITIO III.

SI ratio magnitudinum A ad C major sit qualibet assignabili, non minor erit ratione 1 ad o.

Esto siquidem minor, si fieri potest, puta eadem quæ 1 ad $\frac{1}{m}$ majorem quàm o (intelligendo per *m* quemlibet numerum, quantumvis magnum, qui dividendo unitatem, efficiat fractionem $\frac{1}{m}$ quantumlibet parvam) ergo quia est ut *m* ad 1, ita 1 ad $\frac{1}{m}$, erit ratio A ad C eadem quæ *m* ad 1, adeòque non major qualibet assignabili, contra hypothesim; ratio igitur A ad C non minor est ratione 1 ad o. Quod erat &c.

COROLL. I. Quælibet magnitudo inferioris ordinis, collata magnitudini ordinis superioris, ut merum nihil, in omni rigore, æstimanda est; si enim illa ad istam compararetur, ut aliquid majus nihilo ad unum quidpiam, hæc haberet ad illam rationem minorem quam 1 ad o, cujus oppositum demonstravimus.

COROLL. II. Et ideò nulla inferioris ordinis magnitudo addita magnitudini ordinis superioris, vel ab eadem detracta, hanc auget, aut minuit, sed ejusdem quanti-

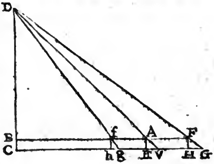
tita-

titatis relinquit, ad ipsam enim comparatur, ut nihil ad aliquid, unde sicut 1+o, & 1−o æquantur 1, ita finita quantitas per infinitè parvæ additionem, aut subtractionem, non crescit aut minuitur, nec quantitas infinita per accessum, aut recessum finitæ quantitatis, nec etiam (si quę sint) plusquam infinitæ magnitudines augentur, aut decurtantur per magnitudinem, absolutè quidem infinitam, sed ordinis inferioris; ac in universùm, *magnitudines æquales censendæ sunt, quæ magnitudine dumtaxat infinities minori differunt*, ut in libello *Quadrat. Circ. & hyperb. ad Coroll. prop.* 17. dudum ostendi, & in Scholio ibidem adjuncto generatim admonui, ad hunc ipsum tractatum respiciens, quem vel ex tunc adumbraveram.

PROPOSITIO IV.

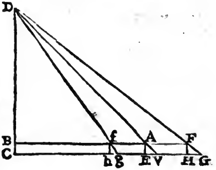
QUantitatum infinitè parvarum, quædam sunt ejusdem ordinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem habere possunt.

1. Sit primò triangulum D B A, in quo D B æquetur B A, & huic parallela ducatur C V, ipsique propiùs accedere, atque infinitè proxima fieri intelligatur: quomodo tam B C (sive A E illi æquidistans) quàm E V, infinitè parvæ evadent *ex defin.* 4. quippe ad finitas D B,

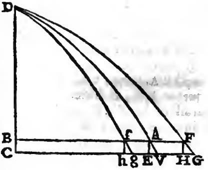


aut B A rationem habere poterunt minorem qualibet assignabili: semper tamen, ob similia triangula D B A, A E V, erit B C, sive A E æqualis E V, ut D B æqualis B A ponebatur. Quod si jam D B ad B F supponeretur habere aliam quam-

quamlibet rationem, putà *m* ad *n*, juncta D F G, & ducta F H ipsi B C parallela, erit similiter infinitè parva B C, vel F H ad infinitè parvam H G in eadem ratione assignabili *m* ad *n*, quam habent ipsæ DB, BF; quare in magnitudinibus infinitè parvis quælibet assignabilis ratio locum habere potest; Quod erat demonstrandum.



2. Sit jam secundò circa axem D B quælibet curva D A V, & alia huic analoga D F G, cujus nempe ordinatæ B F, C G ad ordinatas prioris B A, C V sint perpetuò in quavis constanti ratione assignabili *m* ad *n*. Si ergo, ut antea, fiant infinitè proximæ B A F, C V G, & ductæ sint axi parallelæ A E, F H, constat, ipsas ordinatarum differentias G H, E V fieri infinitè parvas; & tamen cùm eadem sit ratio assignabilis *m* ad *n*, tum integræ C G ad integram C V, tum B F, sive C H ablatæ ad ablatam B A seu C E, erit & reliquæ G H ad reliquam V E assignabilis eadem ratio *m* ad *n*; Quare &c.



3. Patet hinc tertiò etiam trapetia figuræ primæ, seu quadrilinea figuræ secundæ, F B C G, A B C V, [quæ pariter fiunt infinitè parva, pro majori accessu linearum B F, C G)

CG) futura semper in eadem ratione assignabili *m* ad *n*, quam perpetuò observant, in pari altitudine, quælibet ipsorum ordinatæ GC, CV: ergo &c.

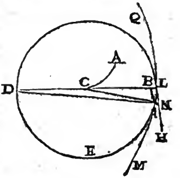
4. Quin etiam quartò, si eadem quadrilinea circa axem BC revolvi intelligantur, orientur hinc trunci conici, seu conoidales, infinitè parvi [nam pro majori accessu planorum circularium, radiis BF, CG descriptorum, hi trunci assignabili quovis corpusculo minores evadent]& tamen semper in ratione assignabili, nempe duplicata ipsius *m* ad *n*, sive dicas, ut *mm* ad *nn*, esse ostendentur, ob circulos à quibuslibet ipsorum quadrilineorum ordinatis FB, AB, sive CG, CV, descriptos, eorundem radiorum quadratis proportionales: itaque & in hoc magnitudinum genere vera est Propositio.

SCHOLION.

Hinc patet eorum hallucinatio, qui magnitudines infinitè parvas pro minimis sui generis habent, illasque sive ut penitus indivisibiles, sive ut invicem æquales considerant. Non solent quidem summi Mathematici in hunc errorem cum vulgo impingere, nec desunt tamen exempla quædam, probantia id posse aliquando Viris etiam in hac arte, atque in hac ipsa methodo, versatissimis, per incogitantiam, excidere. Videat Cl. Varignonius (hujus regulæ certè non ignarus, quam & toties exactissimè observat) an non occasionem præbuerit, suspicandi, calculi perplexitati majorem, quàm legitimo infinitè parvorum usui, attentionem ab ipso impensam, quoties Vires Centrales examinans, aut Radios Evolutarum inquirens, angulum contingentiæ, utpotè infinitè parvum, assumit velut æqualem angulo infinitè parvo, ad centrum osculantis circuli, à binis radiis infinitè proximis constituto, indeque triangula isocelia considerat, eandemque laterum ad basim proportionem deducit. Videantur Monum. Academ. Reg. edit. Amstelødam. anni 1700 pag. 301: anni 1701 pag. 27,

31, 34: anni 1703. pag. 252: anni 1706 pag. 245, 293, 647, 652, 656, *atque alibi fortasse.*

Nimirum posita Curva Q L M, ejusque Evoluta A C (quam videlicet tangunt prioris curvæ perpendiculares quælibet L C, l C) ductisque radiis infinitè proximis L C, l C ad centrū circuli L E D, propositam curvam osculantis (eo quòd sit maximus ille ad punctum L inscriptibilium, eandemque cum ipsa Q L M curvatura rationem obtineat, circa punctum L ipsi veluti congruens, & cum illa longissime repens) atque intervallo L l infinitè parvo, descripto arcu l N, occurrente tangenti L H in N, contendit Varignonius locis citatis, similia



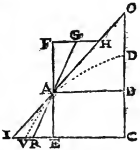
fore triangula L C l, l L N, unde deducit l N esse tertiam proportionalem post C L, L l, perinde ac si anguli infinitè parvi l L N, L C l æquales forent, cùm hic potius sit duplus illius; Nam extenso radio L C ad aliam circumferentiæ partem in D, ac juncta D l, est angulus L C l duplus ipsius l D L (20. 3. elem.) *huic verò æquatur l L N, qui à tangente L H, & secante L l [cum arcu L l ad summum congruente] constituitur* [22. ejusd.] *adeoque L C l duplus est l L N; quare dictorum triangulorum similitudo, laterumque ad basim prætensa proportionalitas, non subsistit; Imò ducta l B tangenti L N parallela, ostendetur* [coroll. 8. 6. elem.] *L l media proportionalis inter B L, seu l N, & diametrum L D, non inter illam, & radium; adeòut formulę ex Varignonii calculo sic instituto prodeuntes, sint duplo majores quàm res exigeret. Atque hæc potius vera ergo censebitur differentia inter formulas Virium centralium, anno* 1701 *adductas à formulis anno* 1706, 24 Aprilis, art. 11, 12, & 13 *inventis, quam differentiam Auctor ipse* pag. 238 *animadvertens,*

tens frustrà excusare nisus est, ex quo non tam magnitudinum æqualitas, quàm rationum similitudo in formulis illis exprimeretur, quæ etiam in duplicato, vel utcunque multiplicato ipsarum valore persistit: quod licèt verum sit, genuinum tamen illius variationis fontem non aperit, ex prænotata lege, tunc minùs attentè observata, pendentem; unde licèt in Varignonis casu nullus error denotationem Vis centralis inficiat, eo quòd perinde res se habeat, sive illa reciproca radii colligatur, sive reciproca diametri circuli osculatoris, cùm ipsimet radii sint, ut integræ diametri, tamen, admissa hac arguendi ratione, posset in aliis casibus talis error obrepere, unde falsa penitus conclusio deduceretur.

PROPOSITIO V.

Quadam etiam, ex quantitatibus infinitè parvis, diversi sunt ordinis, atque aliæ aliis infinities majores, aut minores, idque sine ullo limite.

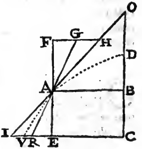
1. Sit primò curva D A V, cujus ordinatæ A B infinitè proxima fieri concipiatur alia C V, & axi DB parallela EA extendatur ultra curvam in F ad aliquam datã longitudinẽ AF, ducaturque FH ipsi AB parallela, occurrens in H rectæ OAI tangenti Curvã propositam in A, & concurrenti cum C V in I; tum divisa FH ad punctum G in quavis ratione assignabili *m* ad *n*, jungatur G A, quæ producta omninò intra curvam cadet (aliàs & ipsa tangeret, quod est absurdum; nec enim duæ rectæ ad idem unius continuæ curvæ punctum illam tangere possunt) licèt post aliquod determinabile intervallum, illam fortasse sit secatura, & ideò ipsam C V, quæ ad in-



 ter-

tervallum minus quolibet dato ipsi A B accedit, omninò secabit inter E & V, velut in R: eritque ratio E I ad I V major ratione ejusdem E I ad I R; sed hæc, ob similitudinem triangulorum, eadem est, ac F H ad H G, quæ potest esse quævis assignabilis *m* ad *n*, ergo E I ad I V, adeoque & dividendo E V ad V I, rationem habet majorem qualibet assignabili, unde *ex defin.* 5. *&* 6. illa infinities major est, quàm ista, & ordinis, ad hanc superioris; Quod &c.

2. Rursus trilineum ipsum V A I erit infinities minus trilineo E A V, vel E A I (ob basim V I infinitè minorem ipsa V E, vel E I) necnon ipsorum utrumque adhuc infinities minus est quadrilineo infinitè parvo A B C I, vel A B C V, aut A B C E [quia lineæ E V, E I sunt ipsa A B infinities minores) unde & hinc patet, varios ordines resultare infinitè parvorum.



3. Quin etiam si circa ordinatam B A omnes illæ areæ rotarentur, foret solidum à trilineo V A I infinitè minus solido à triangulo E A I, vel à trilineo E A V: hoc autem rursus infinitè minus solido à quadrilineis A B C I, A B C V, A B C E genito, nam quælibet superficies cylindricæ, ab V I, V E, E C productæ, fierent eodem ordine aliæ aliis infinities minores; Quare constat propositum.

COROLL. I. Cum ostensa sit *num.* 1. recta V I minor infinities ipsa E V, hinc est quòd juxtà *coroll.* 2 *prop. III.* potest E V considerari ut æqualis ipsi E I, à qua differt differentia infinitè minori.

COROLL. II. Unde amplius demonstratur methodus infinitè parvorum in ducenda cujusvis curvæ tangente; cùm enim, ob similitudinem triangulorum, sit I E, sive illi, ex dictis, æqualis V E, ad A E, ut A B ad B O, ergo sub-

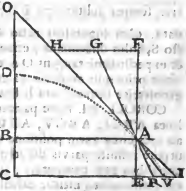
tan-

tangens BO est semper quarta proportionalis post differentiam infinitè parvam ordinatarum VE, & differentiam abscissarum AE seu BC : quare, si ordinata vocetur y, & abscissa x, adeoque differentiæ earundem sint dy, dx, erit semper subtangens $BO = \frac{ydx}{dy}$. Et ex curvæ natura data, cùm innotescat ratio dy ad dx (ut mox in subiuncto Scholio docebimus) etiam nota fiet ratio BA ad BO, & expeditissimè tangens OA determinabitur: ita ut à suismet principiis mysteria calculi differentialis hoc modo geometricè demonstrata habeantur.

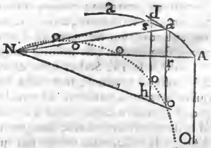
COROLL. III. Hinc pariter colligitur, ipsamet quadrilinea ABCI, ABCV, ABCE [nec non & solida, quæ ab ipsis circa axem positione datum rotatis gignerentur] utpotè infinitè parvis differentiis discrepantia, posse pro æqualibus ritè computari, *juxta idem coroll. 2 prop. III.* cui fundamento nititur calculus integralis; ex ejus enim præscripto, summa ex rectangulis ordinatarum BA in quaslibet sibi correspondentes differentias infinitè parvas axis BC, æquatur ipsimet areæ curvilineæ CDAV: nec non summa cylindrorum, quorum bases sint circuli ab ordinatis descripti, & altitudines sint eædem infinitè parvæ differentiæ axis, æquatur rotundo solido, ab ipsa figura curvilinea generato: quippe differentia omnis, per indefinitam axis sectionem, multiplicato eorum rectangulorum, aut cylindrorum numero, & diminuta in infinitùm quantitate singulorum, fit infinitè exigua, adeòque evanescit.

COROLL. IV. Sed et hinc constat, ipsummet arcum AV infinitè parvum, tam rectæ lineæ AV sibi subtensæ, quàm tangentis portioni AI æqualem esse: si enim AG tam propè accedere concipiatur ad rectam AH, ut punctis G, H sibimet invicem fermè congruentibus, utriusque ipsarũ AG, AH differentia minor fiat quavis assignabili magnitudine, idest evadat infinitè parva, tunc *ex 2. coroll. prop.*

prop. III. fiet altera alteri æqualis; quare et A R æqualis evadet ipsi A I tangenti, multoque magis curva A V utrique interposita [quæ mediæ inter utramque longitudinis est, itaut quamdiu finita fuerit, major quidem ostendatur subtensa recta A V, adeoque & A R, quæ perpendiculo est propior, at minor tangente A I, obtusum angulum A V I subtendente.] fiet æqualis tum ipsi tangenti A I, tum suæ subtensæ A V, & promiscuè una ex his pro alia tutò usurpari poterit, quoties de infinitè parvis sermo fuerit: imò ipsamet curvæ particula A V infinitè exigua, tamquam recta considerari poterit, citra ullum erroris periculum [nam error dum fit infinitè parvus, tandem evanescit, ac nullus evadit] quod significant recentiores Geometræ, dum curvas omnes sub ratione cujusdam polygoni infinitorum laterum spectare nos docent, & curvarũ tangentem quamvis pro unius, ex ejusmodi lateribus infinitè parvis, productione æstimãdam præscribunt.



COROLL. V. Eodem jure areas curvilineas quandoque licebit in triangula rectilinea infinitè parva resolvere, ad ipsarum dimensionem venandam: veluti si proponatur curva *Aaa*, electo ubilibet, sive intra, sive extra curvæ perimetrum, quovis puncto N, atque



atque inde ad singula curvæ puncta ductis ramis infinitè proximis N*a*, N*s*, poterit sector N*sa* pro triangulo rectilineo censeri, quia *ex coroll. preced.* arcus *as* infinitè parvus pro recta assumi potest: & quoniam, extensa N*s* ad tangentem in *d*, portio *sd* adhuc infinities minor evadit recta N*s*, adeòque triangulum *asd* est quantitas infinitè parva secundi ordinis, quippe infinities minus triangulo N*sa* jam infinitè exiguo, poterit indiscriminatim etiam N*ad* sumi pro ipso N*as*, & alterutrum ipsorum considerari velut elementum areæ NA*a*, itaut ejusmodi triangulorum summa det mensuram integram talis areæ; Et si talis alia curva O*o*N exhibeatur, cujus rami N*o* sint perpetuò paralleli ad correspondentem prioris curvæ tangentem *ad*, constat fore aream utrique curvæ interpositam *oo*OA*as* duplam semper sectoris correspondentis A*as*N, propter singula parallelogramma *daob* (quæ non differunt ab areolis infinitè exiguis *oaso*, nisi per trilinea infinities adhuc minora *odo*, *dsa*, ob bases *ob*, *ds* infinities minores ipsis *ao*, *sb*, & ideò æqualia invicem censeri debent *ex coroll. 2 prop. III. sæpe citato*) dupla triangulorum A*d*N in eadem basi *ad*, iisdemque parallelis *da*, N*o* existentium, ut *cap.* 8. *Hugenianorum* demostravimus.

Obiter autem animadvertere placet, hujus methodi fundamentum, etsi novum videatur, nec absque scrupulo à plerisque admitti consueverit, nimirum: *magnitudines, quarum differentia minor evadit qualibet assignabili differentia, seu quæ differre possunt quantitate iisdem infinities minori, pro æqualibus rectè usurpari*: vetustissimum reipsa esse, ac Veterum methodo, quæ per inscriptiones, & circumscriptiones, longiori circuitu, figurarum æqualitatem, vel aliam proportionem venabatur, necessariò fuisse præsuppositum; Vis enim demonstrationum ejusmodi apud Euclidem, & Archimedem in eo certè consistit, quòd, nisi veræ forent ipsorum propositiones, assignari posset differentia figurarum, nem-

nempe excessus, aut defectus ab afferta mensura: facta autem tali assignatione, cùm per inscriptionem, & circumscriptionem ostendantur aliæ figuræ minùs excedere, aut deficere à figuris propositis, quàm pro differentia assignata, & tamen assertam mensuræ rationem constanter observare, concluditur ab absurdo, differentiam ab adversario assignatam nullam esse, utpotè minorem qualibet assignabili: atqui hoc ipsum, majori compendio, & nos dicimus, dum magnitudines, differentia infinities minori discrepantes, pro æqualibus habemus: si non sunt habendæ pro æqualibus, assignabilis erit eorum differentia; assignetur ergo: non igitur ipsarum differentia minor evadet qualibet assignabili, quod est contra hypothesim; falsum est ergo, non esse habendas pro æqualibus: Quod est propositum.

SCHOLION.

INvestigatio autem rationis differentiæ ordinatarum ad differentias abscissarum in qualibet Curva, unde tangentium methodum superiùs, coroll. 2. hujus prop. *pendere diximus, sic procedit. Quantitates determinatæ, & ejusdem semper mensuræ, primis alphabeti litteris* a, b, c, e *&c. denotentur: indeterminatæ verò, quæ subinde crescunt, aut decrescunt, per postremas* x, y, z, u *&c. de more exprimantur, ut habeatur æquatio curvæ propria: sic in parabolis, si latus rectum vocetur* a, *& abscissa* x, *ordinata verò* y, *patet, æquationem curvæ propriam fore* yy = ax, *propter ordinatæ quadratum semper æquale rectangulo abscissæ in latus rectum: atque ita in aliis magis compositis. Tum supponatur abscissa, verbigratia* x, *augeri portione sui infinitè parva* dx *(sic enim illam exprimere docuit Leibnitzius, ut differentiam ipsius* y *vocat* dy, *& ipsius* z *appellat* dz, *atque ita in aliis) adeò ut evadat abscissa* x+dx*; & tum illi correspondere deprehendatur* y+dy, *vel* y — dy *pro ordinata (prout videlicet applicatæ crescunt, aut decrescunt ad incre-*

incrementum abscissæ) itaque in æquatione, qua curva naturam determinat, si loco x, *&* y, *ac productorum ex ipsis, vel potestatum earundem, subrogetur* x†dx, *&* y ± dy, *eorumque producta, aut potestates; ac mox termini comparentur, quos differentia* dx, *&* dy *ingrediuntur, abiectis tum terminis, quos hæ differentiæ non afficiunt [utpotè in vim prioris æquationis, ab initio propositæ, jam æqualibus] tum terminis, quos ingreditur productum ex pluribus differentiis* dx, dy, *sive ad invicem, sive per se ipsas multiplicatis (utpotè infinities minoribus, &* per 2. coroll. prop. III. *æqualitati reliquorum terminorum nihil derogantibus, si abiiciantur) habebitur æquatio differentialis, ex qua ratio differentiæ ordinatarum ad differentias abscissarum, nempe earundem* dy, *&* dx, *innotescet. Itaque in æquatione parabolæ superiùs proposita, ubi* $yy = ax$, *habebitur etiã* $yy + 2ydy + dydy = ax + adx$; *sed jam* $yy = ax$, *ergo residua pariter æquantur, scilicet* $2ydy + dydy = adx$: *abiiciatur* dydy, *quod infinities minus est ipso* 2ydy [*nam ad illud est in ratione infinitè parva quantitatis* dy *ad finitam* 2y] *manebit adhuc* $2ydy = adx$; *adeòque ut* a *ad* 2y, *sive ut* y *ad* 2x, *ita* dy *ad* dx, *& ita consequenter ex supradictis* coroll. 2. hujus propositionis, *ordinata* y *ad subtangentem, quæ ideò dupla invenietur abscissæ* x, *utpotè* = 2x.

Aliud exemplum esto in curva, cujus natura definitur æquatione $yy = aa + xx$ (*quæ esset hyperbola æquilatera ad secundam diametrum relata) ergo si* y *evadat* y†dy, *& x fiat* x†dx, *habebitur* $yy + 2ydy + dydy = aa + xx + 2xdx + dxdx$: *auferantur tum* $yy = aa + xx$, *tum termini infinities minores reliquis* dydy, *ac* dxdx; *eritque* $2ydy = 2xdx$, *adeoque* dy *ad* dx *erit, ut* x *ad* y, *unde ut abscissa* x *ad ordinatam* y, *ita erit ipsa eadem ordinata* y *ad subtangentem quæsitam, quæ erit tertia proportionalis abscissæ, & ordinata.*

Expeditiùs autem sumitur differentia cujusvis æquationis propositæ, si in illa ubique termini ab indeterminatis affecti multiplicentur per numerum dimensionis earundem indeterminatarum, &

& una illarum dimensio in suam differentialem commutetur, loco x, *&* y *scribendo* dx, *&* dy. *Ita enim si* $yy = ax$, *etiam* $2ydy = adx$; *si* $x^3y = a^4 + xxyy$, *etiam* $3yxxdx + x^3dy = 2xxydy + 2yyxdx$, *adeoque per antithesim*, $3yxxdx - 2yyxdx = 2xxydy - x^3dy$: *& sic est* dy *ad* dx, *ut* $3yxx - 2yyx$ *ad* $2xxy - x^3$. *Id quod valet in quibusvis, tam perfectis, quàm imperfectis indeterminatarum potestatibus: adeò ut generatim differentia ipsius* x^m *sit* $mx^{m-1}dx$, *quemcunque numerum integrum, aut fractum, positivum, vel negativum denotet exponens* m.

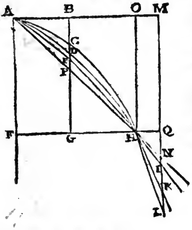
Atque hinc viceversa integratio cujusvis differentialis, seu reversio ad quantitatem, cujus proposita fuerit differentia, habetur, augendo unitate dimensionem indeterminatę x, *vel* y, *& per eandem dimensionem sic auctam, totum productum dividendo, ut ipsius* $x^m dx$ *summa erit* $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. *Unde eliciuntur innumerę spatiorum superficialium, & solidorum dimensiones: dummodò advertatur, inventę summę persape addendam, aut subtrahendam, prout res tulerit, quantitatem aliquam constantem, eo quòd eadem differentia sit duarum quantitatum, sive illis communem jungas, sive demas datam aliquam magnitudinem; Quando autem hęc addi, vel detrahi debeat, invenies, observando, an ubi evanescit quantitas, de cujus dimensione per integrationem obtinenda agitur, pariter evanescat integralis inventa, an quiddam constans inter ejus terminos adhuc supersit, hoc ipsum enim sub signo contrario erit inventæ integrali apponendum, ut verus valor summę quæsitæ habeatur.*

PROPOSITIO VI.

Quod præcedens docuit, aliter per infinitas parabolas demonstrare.

1. Intra quadratum AFHO, cujus diameter AH, descriptæ sint, eodem latere recto AO, infinitæ parabolæ variorum graduum, nempe AEH quadratica, sive Apollo-nia-

niana, A D H cubica, A C H biquadratica, &c. adeo ut ducta ubivis recta B C D E P G axi parallela, secante has curvas, & rectam A H, ut in figura, sit semper H O ad B P in eadem ratione ipsarum O A, A B, sed H O ad B E in earundem ratione duplicata, & ad B D in triplicata, ad B C autem in quadruplicata, atque ita deinceps. Patet ergo, rectas H O, seu G B, & reliquas ejus interceptas B P, B E, B D, B C &c. fore semper continuè proportionales; quare si tam proxima fieri concipiatur B G axi A F, ut intercepta B P evadat infinitè parva, cùm sit ratio G B ad B P eadem

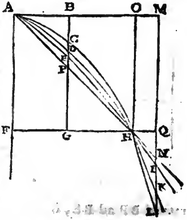


rationi B P ad B E, & hujus ad B D, & hujus rursus ad B C, prima autem ratio sit major qualibet assignabili *ex def. 4. & convertendo*, etiam reliquæ majores erunt qualibet assignabili, & ideò quantitatum P B, B E, B D, B C, quælibet respectu antecedentis erit, *per def. 5. & 6.* infinitè parva, atque inferioris ad ipsam ordinis: quare inter magnitudines absolutè infinitè parvas datur hæc diversitas ordinis: quod erat &c.

2. Angulus contingentiæ B A E est infinities minor angulo rectilineo B A P, & angulus B A D rursus infinities minor est angulo B A E, angulus autem B A C infinities adhuc minor est angulo BAD, atque ita porrò in infinitum, ob subtensas P B, E B, D B, C B, eadem ratione majori quavis assignabili in infinitum decrescentes; datur ergo & in angulis infinitè parvis hæc ordinis diversitas: quod erat demonstrandum.

 3. Area

3. Area ipsa rectanguli infinitè parvi A B G F infinitè major est triangulo A B P, & hoc infinitè majus trilineo A B E, quod ipsum infinitè majus est trilineo A B D, & hoc infinitè adhuc majus trilineo A B C, atque ita deinceps, ob bases continuè proportionales, & ratione majori qualibet data decrescentes; unde patet in superficiebus infinitè parvis hæc diversitas ordinis.



4. Quod si eædem areæ vertantur circa A B, ut à rectangulo A B G F cylindrus, à triangulo A B P conus, à reliquis trilineis fusi conoidales generentur, constat, ex solidis ita genitis, alia aliis infinities minora, ob similem rationem, proditura; quare et in corporibus infinitè parvis variorum ordinum diversitas locum habet; quod erat &c.

COROLL. Ex dictis supra *num.* 2. habetur, quòd sicuti nulla recta linea primum angulum contingentię B A E dividere potest, ut ostendit Euclides *lib.* 3. *prop.* 16. sed tantū arcus circuli, vel parabolæ, aut alterius lineæ æquicurvæ; ita postmodùm angulum B A D nullus arcus circuli, vel parabolæ quadraticæ dividere potest, sed tantùm arcus parabolæ cubicæ sibi similis, vel altioris ordinis; angulum verò B A C nec ipsa quidem parabola cubica dividet, atque ita de aliis in infinitum: *neque novit natura limitem*, ut ait doctiss. Eques Isaac Nevvton *Princip. Math. Philos. Nat. lib.* 1. *Sect.* 1. *Schol. post lemm.* 11. ubi et notat, binis quibuslibet ejusmodi angulis alios rursus inseri posse

me-

medii, inter utrumque, ordinis, ideſt infinities minores uno extremorum, & infinities majores alio.

SCHOLION.

Ex hoc vario infinitè parvorum ordine, innotuit Philoſophis, Gravitatem eſſe vim infinitè parvam reſpectu Virtutis cujuslibet actu moventis corpus quoddam velocitate nota menſura; ſi enim hæc Virtus proiiciat mobile per directionem AO, ita ut tempore t *ferri poſſit ab A ad O, utique dicti temporis particula infinitè parva* dt *illud promovebit per portionem ſpatii infinitè parvam AB; ſed interim Gravitas illud deprimet uſque ad parabolam AEH, nimirum per particulam BE infinitè minorem ipſa BF, ſive ipſa AB; quare Vis Gravitatis infinities minor cenſenda erit Virtute dicti proiicientis mobile per AO, ſiquidem illi reſpondet effectus infinities minor, quàm huic, dum utraque tempore infinitè parvo, ut æquabiliter operans, concipi debet, nam augmenta velocitatis, quæ tempore infinitè parvo* dt *ſibi ſuperaddit Gravitas ſupra illum infinitè exiguum velocitatis gradum, quo incipit deprimere mobile, utpotè infinities infinitè minora, velut nihil conſideranda ſunt, donec per tempus finita, & nota menſuræ ſatis adoleverint, ut jam debeant computari. Idem ſequetur in Viribus (ſiqua ſint alicubi) aliorum generum infinities minoribus: nempe ſi talis ſpecies Gravitatis, aut Vis centripeta concipiatur, quæ corpora acceleret in duplicata ratione temporis, hæc compoſita cum eadem Virtute projectiva, in temporis differentia infinitè parva* dt *deprimet mobile per BD uſque ad parabolam cubicam, dum Vis gravitatis depreſſiſſet per BE uſque ad parabolam quadraticam; ideoque Vis centripeta dicti generis foret adhuc infinities minor Vi gravitatis, propter motum BD infinities minorem ipſo BE. Similiter ſi Vis centripeta ejus rationis fingeretur, quæ accelerarct mobile in triplicata temporis ratione, conſtat, quòd hæc, momentaneo tempore* dt, *non niſi per BC ad parabolam quadratoquadraticam deprimeret mobile,*

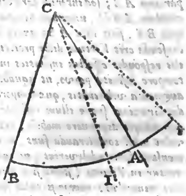
unde

unde adhuc infinities minor praecedenti probaretur. Verùm hæc de infinitè parvis sufficiat breviter attigisse: ad infinitè magna gradum facere convenit, de quibus eadem fermè demonstrabimus, ut nostrum propositum Spatiorum Plusquam infinitorum concludere liceat.

PROPOSITIO VII.

Quantitatum absolutè Infinitarum quædam ejusdem sunt ordinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem habere possunt.

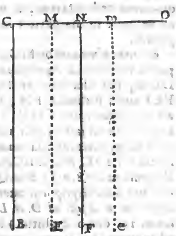
1. Sit enim primò angulare spatium BCA, lineis CB, CA æquè in infinitum productis, per modum infinitè longi sectoris, interjectum, fiat autem angulus BCI ad ipsum BCA in quavis ratione assignabili *m* ad *n*: patet, infinitum quoque spatii interceptum rectis CB, CI æquè in infinitum protractis cum ipsa CA, futurum in eadem ratione assignabili *m* ad *n* ad angulare spatium prius datum BCA: ideoque hæc absolutè infinita spatia ejusdem inter se ordinis erunt, & quamlibet inter se rationem habere poterunt.



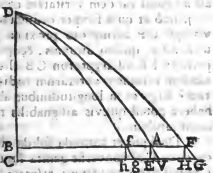
2. Sit rursus (*in figura sequenti*) parallelogrammum infinitè longum BCNF super finita basi CN, & fiat CM ad CN in qualibet ratione assignabili *m* ad *n*, ducaturque ipsis CB, NF parallela ME, eritque infinitè longum parallelogrammum basi CM, lineis CB, ME (æque infinitè productis cum ipsa NF) interjectum, ad prius

pa-

parallelogrammum BCNF in eadem assignabili ratione *m* ad *n*, hoc est suarummet basium CM ad CN: quod erat &c.



3. Infiniti cylindri ex conversione parallelogrammorum BCME, BCNF circa CB, erunt utique in ratione basium, quæ duplicata est ipsarum CM, CN, adeoque in ratione assignabili *mm* ad *nn*, quare etiam in figuris solidis vera est propositio: quod oportuerat demonstrare.

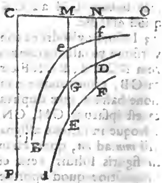


4. In qualibet ex iis figuris, quæ in infinitum amplientur, ut parabolę, aut hyperbolę DAV, circa axem DC, fiat alia figura DFG priori analoga, cujus nempe ordinatæ FB, GC ad ordinatas prioris AB, VC sint semper in eadem ratione quapiam assignabili *m* ad *n*: patet, quòd si utraque cum axe suo in infinitum producatur, erit area infinita CDFG ad infinitam aream CDAV in ratione ordinatarum *m* ad *n*, quæ est ratio assignabilis; ergo idem quod prius.

5. Sed et solida ab his genita circa axem infinitum DC erunt in ratione suarum sectionum circularium, sive ut qua-

quadrata ordinatarum, & ideò in ratione assignabili *mm* ad *nn* unde in his pariter infinitis corporibus obtinet propositio.

6. Inter asymptotos MC, CP posita Hyperbola Apolloniana DGB, fiat alia huic analoga FEI cujus ordinatæ FN, EM ad ordinatas prioris DN, GM sint in quavis assignabili ratione *m* ad *n*, patet infinita utraque spatia NFEIC, NDGBC (ut in Hugenianis *cap*. 8. *n*. 11. & in Quadratura Circuli *prop*. 17. ostendi, atque infra *Epist. ad D. A. L. A. lemm*. 12. demonstrabitur) fore ad invicem in eademmet ratione assignabili ordinatarum *m* ad *n*; quod eandem veritatem confirmat.



7. Imò et quia semper ordinata quævis ME, quantumvis ipsi CP asymptoto proxima, est ad ordinatam MG, ut *m* ad *n*, quidni dicamus, & ipsam asymptoton CI hyperbolæ FE ad asyptoton CB alterius hyperbolæ pariter eandem rationem cæterarum ordinatarum *m* ad *n* habituram? Ergo et in longitudinibus absolutè infinitis locum habere potest quævis assignabilis ratio: quod fuerat demonstrandum.

8. Denique et rotunda solida ab hisce spatiis asymtoticis circa CN conversis genita sunt molis absolutè infinitæ (potest enim ex utrovis resecari versùs basim cylindrus æqualis cuilibet dato *ex coroll*. 18. *Torricell. de Solido Hyperbolico*), & tamen assignabilem inter se rationem observant *mm* ad *nn*, quæ est quadratorum, seu circulorum, qui ab ordinatis genitricum hyperbolarum, ea rotatione, fiunt: itaque infinitæ magnitudines cujuslibet assignabilis rationis sunt capaces: quod &c.

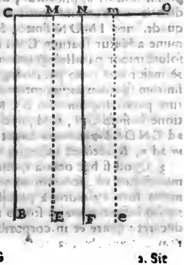
CO-

COROLL. Patet ex dictis n. 7. infinitas asymptotos hyperbolarum non semper æquales censendas esse, cùm imò sint ad invicem, ut quæ in pari altitudine ad alteram asymptoton utriusque hyperbolæ ordinantur, sive ut inscripta ipsarum parallelogramma, vel etiam ut earundem hyperbolarum figuræ, quæ à recto, & transverso ipsarum axe continentur: quemadmodum & ipsa hyperbolica spatia sunt in eadem ratione dictarum figurarum, quæ sub axibus continentur; qua in re, ut in plerisque aliis proprietatibus, convenire hyperbolas cum ellipsibus, quæ pariter sunt, ut axium figuræ, notissimum est Geometris.

PROPOSITIO VIII.

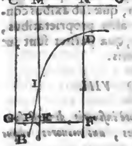
Quadam verò, ex quantitatibus absolutè infinitis, diversi sunt ordinis, atque alia aliis infinities majores, aut minores, idque sine ullo limite.

1. Si primò Spatium angulare BCO, lateribus CB, CO indefinitè productis interjectum: patet, hoc infinities majus fore quovis parallelogrammo infinitæ dūtaxat longitudinis CB, sed finitæ latitudinis CM, aut CN, videlicet ipso BCME, aut BCNF, nam in pari omnium longitudine infinita CB, sunt ad invicem, ut latitudines CO, CM, CN, quarum prima ad utramlibet posteriorum habet rationem majoré qualibet assignabili.



2. Sit

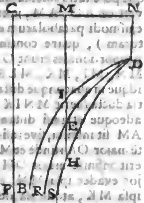
2. Sic deinde Spatium C N D I P B, hyperbolâ Apollonianâ D I P [aliave curva asymptotica, quæ cum asymptoto infinitum spatium contineat, cujusmodi est Conchois Nicomedea, & aliæ altioris gradus Hyperbolæ, qua parte ordinatarum potestates majores sunt potestatibus abscissarum] cum sua asymptoto C B infinitè producta comprehensum; & fiat, ut *m* ad *n*, ita N C ad C M, tum agatur M E asymptoto parallela, quæ ipsi curvæ D I P alicubi occurret, velut in I [eo quòd curva semper fiat propior asymptoto, & ad intervallum G P perveniat minus quolibet dato intervallo, C M vel G E] atque ulterius protensa, spatium P I E absolutè infinitum (cujus nempe ordinatæ P E perpetuò crescunt, dum longitudini I E in infinitum minori applicantur, decrescentibus è contrario ordinatis asymptotici spatii G P) comprehendet; unde si quadrilineo I M D N finito, & bilineo P I E infinito, commune addatur spatium C M I P B, fiet area, C N D I B absolutè minor parallelogrammo infinitè longo B C M E: quare major erit ratio parallelogrammi infiniti B C N F ad infinitum spatium asymptoticum C N D I B, quàm ad infinitum parallelogrammum B C M E: est autem ad hoc in ratione basium C N, C M, hoc est, ut *m* ad *n*; ergo B C N F ad C N D I B rationem habet majorem quâlibet assignabili *m* ad *n*, & ideò est infinities majus eodem. Quod &c.



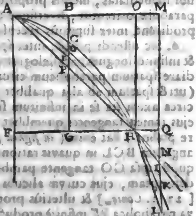
3. Quod si hæc omnia spatia circa C N O converterentur, manifestum est, solidum ab angulari spatio B C O infinities majus fore cylindro à parallelogrammo B C N F, & hoc rursus infinities majus solido infinito, quod C N D I B produceret: quare et in corporibus infinitis diversi infinitorum ordines observantur.

4. Jam

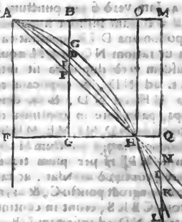
4. Jam verò ſi per punctum D, inter aſymptotos CN, CB tranſeant infinitæ hyperbolæ, nimirum linearis, ſive Apolloniana D I B, quadratica D E R, cubica D H S &c. ita ut rationi N C ad C M æqualis ſit ratio M I ad N D, ejuſdem verò duplicata ſit ratio M E ad N D, & triplicata ratio M H ad N D, & ſic deinceps, patet fore in continua ratione ipſas N D, M I, M E, M H &c. ideoque etiam ſi punctum M cum linea M I F H per ipſum tranſeunte, continuò accedat, ac tandem congruat puncto C, & aſymptoto C B R S, erunt in continua ratione N D ad infinitam C B, ut C B ad infinitam C R, atque ut hæc ipſa ad infinitam C S, unde varii ordines infinitarum longitudinum naſcentur, quarum aliæ aliis ſunt infinities majores.



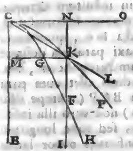
5. Idem ex infinitis Parabolis AEH, ADH, ACH [de quibus *prop.* 6. egimus] ultra nodum H cum recta A H (quę diameter eſt quadrati illis circumſcripti) productis, oſtendi poteſt; ducta enim ipſi H O parallela M L, omnes ſecante in N, I, K, L &c ut in figura, erit rationis A O, A M, ſive O H, M N, duplicata ratio O H, M I, triplicata verò O H, M K, quadruplicata autem O H, M L, at



que ita deinceps (eo quòd præfatæ axi parallelæ sint ex ordine, ut quadrata, cubi, biquadrata, altioresque potestates abscissarum à vertice AO, AM, juxta ejusmodi parabolarum naturam), quare continuè proportionales erunt OH, MN, MI, MK, ML &c. idque in quacunque distantia ducta fuerit MNIKL, adeoque etiamsi distantia AM sit infinita, sive infinitè major OA: undè et MN erit infinitè major OH, & sic MI pariter infinitè major evadet ipsa MN, & MK infinities major MI, & ML ipsa MK, atque ita deinceps sine limite: imò & sumptis, inter binas quaslibet dictarum continuè proportionalium sibi immediatas, mediis proportionalibus, aliæ intermediæ parabolæ orirentur, diversique ordines medii infinitorum prodirent, inter superiùs recensitos.



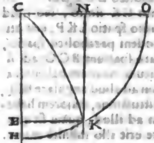
6. Sic ostendi potest, inter spatium infinitum angulare, & infinitè longum parallelogrammum finitæ latitudinis, mediare spatium parabolicum circa suum axem consideratum (uti & spatium ab alia qualibet curva comprehensum, quæ circa axem ita se in infinitum suis ordinatis expandat, ut ejus tamen tangentes quemlibet angulum cum axe continere possint) fiat enim (*in figura sequenti*) angulus BCO ad angulum BCL in quavis ratione assignabili *m* ad *n*: patet, quòd, ipsa CO tangente parabolam CK circa axem CB descriptam, ejus curvæ alicubi occurret CL, velut in K [27. 1. *Conic.*] & ulteriùs protensa continebit cum curva parabolica PK infinitè producta spatium infinitum (quip-



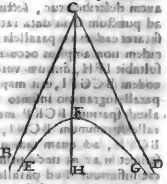
pe cujus latitudo ſemper augetur) PKL; & ideò ſpatium angulare BCL, quod à parabolico BCP deficit quidem ſegmento CK finito, ſed illud excedit infinito ſpatio LKP, erit utique majus eodem parabolico ſpatio, unde angulare ſpatium BCO ad illud parabolicum majorem habebit rationem, quàm ad aliud angulare BCL, ideſt, ex conſtructione, majorem habebit rationem ad illud, quàm ſit quævis aſſignabilis ratio *m* ad *n*, quare erit illo infinitè majus. At, quia recta NKI axi parallela, nedum ſecat parabolam CKP in K, ſed et aliam quamlibet, quæ circea eundem axem deſcriberetur, ſectis ſingulis ordinatis KM prioris ad punctum G in data ratione *m* ad *n*, qualis eſſet CGH, ſecaret eadem axi parallela alicubi in puncto F (*26. 1. Conic.*) eidem non amplius occurrens, unde ſpatium infinitum reſultabit IFH, finitum verò CFN, atque utrivis addito eodem BCGFI, erit majus parabolicum ſpatium BCFH parallelogrammo infinito BCNI, & ideò parabolicum aliud ſpatium BCKP majorem habebit rationem ad parallelogrammum BCNI, quàm ad parabolicam aream BCFH, ad quam tamen rationem habet ordinatarum, ſcilicet *m* ad *n*; unde primum parabolicum ſpatium ſuperat infinitum illud parallelogrammum, ultra omnem aſſignabilem rationem; ſcilicet eſt illo infinities majus, cùm eſſet [ex oſtenſis] angulari ſpatio BCO infinities minus; dantur ergo diverſi infinitorum ordines, ita ut quædam ſint aliis infinities majora, aut minora; quod &c.

COROLL. I. Hinc habetur, infinitum Parabolicum Trilineum OCKP, quod ab angulari ſpatio BCO differt parabolico ſpatio BCP, ex dictis *num. 6.* infinities minori, ipſimet angulari ſpatio BCO æquale cenſeri poſſe [*ex coroll.*

roll. 2. prop. III.] dummodo æquè in infinitum utraque CO, CB protracta intelligatur [ad modum sectoris OCH] si enim recta NK, quantumvis distante, axi parallela definiretur trilineum Parabolicum, jam ejusdem ordinis esset cum parabolica area BCP (nempe illius subduplum) non verò illa infinities majus; sed tunc longitudo CB foret infinities major latitudine CN trilinei, quippe ad hanc esset in ratione ipsius CN [quæ infinita supponitur] ad latus rectum propositæ parabolæ, ex generali natura ipsius.



COROLL. II. Omnis hyperbola EFG circa axem FH indefinitè producta, spatium continet infinitum ejusdem ordinis cum spatio angulari à suis asymtotis BC, CD contento, imò illi penitus æquale, differentia enim asymptoticorum spatiorum BCFE, DCFG infinitè minor est (*ex num.* 2.) ipso angulari spatio, imò tot gradibus illo inferior est.



COROLL. III. Et hinc spatium cujusvis hyperbolæ EFG, circa suum axem FH, infinities majus est spatio parabolæ ad eundem axem per ipsummet verticem descriptæ: illud enim ejusdem est ordinis cum spatio angulari, quod ostensum est infinitè majus parabolico.

COROLL. IV. Insuper hinc ratio elucet, cur impossibile sit Hyperbolen Parabolæ inscribere, aut hanc illi circumscribere, sive per eundem, sive per diversos vertices,

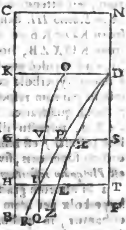
ut

ut habet Vincentius Viviani *lib.* 11. *de Max. & Min. prop.* 50; ſemper enim hyperbola ſuapte natura major eſt, quàm parabola, unde nequit illa intra hujus fines concludi.

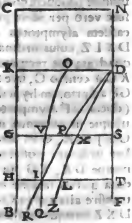
PROPOSITIO IX.

V*Arietatem ordinis Infinitorum item ex infinitis hyperbolis demonſtrare.*

1. Eſto ſpatium D P R B K, ordinata D *K* uni aſymptoto C N parallela, & altera aſymptoto *K* B, atque hyperbola prima, ſive Apolloniana D P R infinitè producta comprehenſum; tranſeat verò per idem punctum D intra eaſdem aſymptotos alia hyperbola D X L Z, cujus ordinatarum D *K*, X G quadrata ſint reciprocè, ut abſciſſæ G C, *K* C à centro C, ſive ut ordinatæ D *K*, G P ad priorem hyperbolam: eruntque (ducta D F aſymptoto C B parallela) ubique in continua ratione D *K* [ſeu G S] G X, G P. Secetur jam quælibet ordinata poſterioris hyperbolæ, nempe D *K*, X G, in punctis O, V in data quavis ratione *m* ad *n*, per quæ puncta intelligatur tranſire alia curva O V Q ejuſdem utique generis cum ipſa D X Z: eritque ſpatium *K* O V Q B ad ipſum *K* D X Z B in ratione K O ad K D, ſive *n* ad *m*, per conſtructionem. Porrò, ubi D X Z pervenerit ad intervallum L H æquale ipſi O K, cùm debeat ordinata L H ad ordinatam I H hyperbolæ O V Q eſſe in ratione D K ad O K, ſive T H ad H L, erunt in continua ratione T H, L H, I H, & ideò punctum I erit etiam ad priorem hyperbolam Apollonianam D P R; quare ſecabunt ſe curvæ O V Q, D P R in puncto I,



cto I, non amplius sibi occurrentes; eo quòd ratio HI ad ad BR semper futura est duplicata rationis HI ad BQ, ut de ipsis DXZ, DPR se in puncto D secantibus diceba-tur. Et ideò spatium KOVQB, ad partes B infinitè protensum, majus erit infinito spatio KDPRB (nec enim portio OVIPD, qua primum spatium à posteriori deficere videtur, est in his computanda, quippe undecunque finita, adeoque infinitè parva respectu dictorum spatiorum, sed attendi debet excessus QIR absolutè infinitus, ut *in Scholio III.* demonstrabimus) unde minor erit ratio spatii KDPRB ad KDXZB, quàm KOVQB ad idem spatium KDXZB, hoc est quàm sit ratio quævis assignabilis, *n* ad *m*; ideòque spatium ab Apollonian hyperbola comprehensum, est infinitè parvum respectu spatii ab hyperbola quadratica definiti, & hoc vicissim, respectu illius (licet absolutè infiniti) est infinitè magnum, & ordinis superioris, sive *juxtà defin. VII.* est *Plusquàm infinitum*; quod &c.



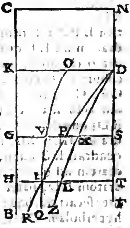
2. Si aliorum graduum superiorum hyperbolæ per idem punctum D describantur, in quibus cubi, vel quadratoquadrata, aut aliæ altiores potestates ordinatarũ reciprocè respondeant abscissis, simili modo demonstrabitur, areas hyperbolarum superiorum infinitè majores esse areis inferiorum, quantumvis jam infinitis, vel plusquam infinitis: supponatur enim DPR Quadratica hyperbola, & DXZ cubica, adeò ut hujus ordinatarum cubi, illius verò quadrata reciprocè sint ut abscissæ; fiat autem, proportionali sectione ordinatarum DK, XG posterioris hyperbolæ, alia cubica hyperbola OVQ; eritque spatium KOVQB ad ipsum

ipfum KDXZB in ratione KO ad KD, puta n ad m. Ponetur jam, curvâ DXZ perveniffe ad intervallum LH, quod fit ad HT, vel KD, ut quadratum KO ad quadratum KD, five ut nn ad mm; occurrat autem hyperbola quadratica DPR ipfi ordinatæ HL in puncto I: eritque HI quadratum ad HL quadratum in ratione compofita ex quadrato HI ad quadratum KD (five ratione cubi HL ad cubum KD, cùm utraque ratio fit reciproca abfciffarum CK, CH) & ratione quadrati KD ad quadratum HL, aut cubi KD ad quadratum HL ductum in altitudinem KD; quæ duæ rationes conflant rationem cubi HL ad quadratum HL in KD, nempe rationē HL ad KD, idest *ex conftr.* quadrati KO ad quadratum KD. Cùm itaque HI quadratum ad quadratum HL fit ut quadratum KO ad quadratum KD, patet ipfas KD, LH, in O, & I proportionaliter fecari, adeòque punctum I pertinere ad cubicam etiam hyperbolam OVQ, quæ propterea fecabit ipfam DPR in I, nec illi amplius occurret, eo quòd femper futurum fit quadratum BR ad quadratum HI, ut cubus BQ ad cubum HI, ut antea oftenfum eft; quare fpatium KOIQB, ad partes B infinitè protenfum, majus erit infinito fpatio KDPRB, ut fuperiori numero concludebamus, adeòque major erit ratio KDXLZB ad fecundum, quàm ad primum, ad quod tamen effe poteft in quavis affignabili ratione DK ad KO, five m ad n; unde liquet, fpatium KDXZB infinitè adhuc majus effe fpatio KDPRB ab hyperbola quadratica comprehenfo, licèt plufquàm infinitum hoc ipfum anteà deprehenderimus. Quod &c.

3. Et fi quælibet ipfarum GP, KD poteftates ab exponente e indicatæ reciprocè refpondeant abfciffis, ordinatifve alterius hyperbolæ GX, KD ad poteftatem unitate fuperiorem elevatis, femper his ipfis ordinatis in V, & O proportionaliter fectis, curva OVQ occurret priori hyperbolæ DPR in I, ubi correfpondebit ordinatæ pofte-

 rio-

tioris hyperbolæ HL, quæ sit ad KD, ut potestas e ipsius KO ad potestatem similem ipsius KD, unde renovabitur semper precedens argumentum; idque generatim sic ostendetur. Sit $KD = a$ & hyperbolæ DXZ ordinata quævis GX, aut HL ponatur $= y$, quæ si proportionaliter secentur in O, V per curvam OVQ in ratione m ad n, occurrat hæc curva in I alteri hyperbolæ DPR, cujus ordinata quævis GP, $HI = z$; ergo in concursu I fiet $z = \frac{ny}{m}$, & $z^e = \frac{n^e y^e}{m^e}$; estque z^e ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, ergo $\frac{n^e y^e}{m^e}$ ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, & $n^e y^e a^{e+1} = m^e a^e y^{e+1}$, & rursus dividendo per $y^e a^e$, erit $n^e a = m^e y$, indeque y ad a, ut n^e ad m^e, nempe ut potestas e ipsius KO ad similem ipsius KD potestatem; Quod &c.



COROLL. I. Hinc constat, omnes hyperbolas altioris gradus supra Apollonianam verè *Plusquam — infinitas* juxta VVallisii appellationem, & doctrinam censendas, utpotè infinities majores areis hyperbolicis ordinariis ad asymptoton resectis: & quantumvis proportionali augmento, aut decremento singularum ordinatarum; augeantur istæ, minuantur illæ, numquam hyperbolas unius generis posse cum hyperbolis alterius generis comparari.

COROLL. II. Consequens etiam hinc est, in Arearum dimensione non sufficere, ut quædam illarum absolutè infinitæ demonstrentur, sed ampliùs requiri, ut ostendatur ad quem infinitorum ordinem, aut gradum pertineant: Quod facile est, observando ad quod infiniti aliunde noti genus rationem assignabilem habere possint. Verbi gratia,

Spa-

Spatium, à Conchoide Nicomedea cum asymptoto contentum, infinitum est ejusdem generis cum Spatio asymptotico hyperbolæ Apollonianæ, cui comparari potest *ex prop. 21. nostri libelli de Quadr. Circ. & Hyperb.* Item spatium à Quadratice Dinostrati ultra quadrantem continuata, & ab ejus asymptoto comprehensum, ad eandem classem spectat, ut ex ejus comparatione cum hyperbola Apolloniana, quàm alibi exhibebimus, constare potest. Spatium quod curva Logarithmica, & recta ad ejus asymptoton parallela interiicitur, ejusdem ordinis est cum parallelogrammo infinitæ longitudinis, sed infinities minoris, quàm sit asymptotus Apollonianæ hyperbolæ. Spatium hyperbolicum, circa axem infinitè productum excurrens, ejusdem ordinis est cum infinito spatio angulari. Area curvæ, quæ ab Insigni Geometra Hieronymo Sacherio in *Neostatica lib. 3. pr. 10.* infinita demonstratur, ad asymptotici spatii, quod Apollonii hyperbola complectitur, classem pertinere imò ad ejus dimensionē referri ostenditur: atque ità de aliis.

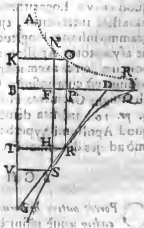
SCHOLION I.

O*Portet autem in horum Spatiorum comparatione supponere eadem* æquè infinitè *in longum protensa, aliàs Infinitum ordinis inferioris æquari poterit Infinito superioris ordinis ad infinitam longitudinem inferioris gradus, seu priori infinities minorem applicato; Cùm enim Spatium asymptoticum hyperbolæ Apollonianæ sit infinitum, atque æquivalet parallelogrammis inscriptis multitudine infinitis, quæ si ad parem latitudinem componantur, efficient utique parallelogrammum infinitè longum, ipsi hyperbolico spatio æquale; sed hæc ipsa infiniti parallelogrammi longitudo inferioris ordinis erit, sive infinities minor infinita longitudine spatii hyperbolici: unde non mirum, quòd hoc modo simul utraque spatia adæquentur.*

At comparando parallelogrammum æquè infinitè longum, ac sit

hyperbolicum spatium, quamlibet exigua fuerit parallelogrammi latitudo, semper, ex demonstratis, erit parallelogrammum infinities majus spatio hyperbolico, quod ipsi asymptoto adiacet: idemque intelligas de aliorum, quæ enumeravimus, spatiorum comparatione.

COROLL. III. Undè adhuc habetur, infinitam asymtoton Logarithmimicæ, seu Logisticæ, infinitè minorem esse infinita asymptoto hyperbolæ Apollonianæ. Nam quia Logisticæ Q R S subtangens G T est ad quamlibet axi parallelam, P R, adeoque & quadratum T G ad rectangulum T G in P R, ut rectangulum hyperbolæ inscriptum KOPB ad spatium hyperbolicum QR OP (ordinatis Q R, P O interceptum) *ex cap. 6. Hugenian. n. 6.* fit, ut si parallelogrammum hyperbolæ inscriptum æquetur quadrato T G, etiam spatium quodvis hyperbolicum Q P Q R æquetur T G in P R, adeòque totum infinitum Spatium hyperbolicum A R Q R A æquabitur rectangulo ejusdem T G in asymptoton Logisticæ infinitè productam B G. Quare, ex præcedenti, erit longitudo ipsius B G infinitè minor longitudine asympoti hyperbolici B A.

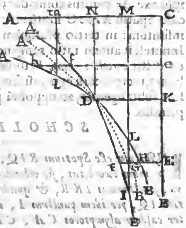


S C H O L I O N II.

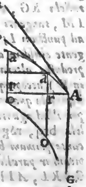
I*Mò observatione dignum est, Spatia quœnis asymptotica finita, longitudini quidem infinitæ adiacere, sed infinitè semper minori, quàm sit asymptotus hyperbolæ Apollonianæ. Nam & altiores hyperbolæ* [in figura sequenti] *ASDFB, qua parte ad*

asym-

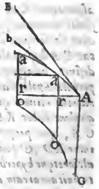
asymptoton C A spatium finitum comprehendunt; asymptoton infinitè minorem, quàm sit hyperbolæ asymptotus, obtinent; eo quòd, cùm sit semper e f *media inter K D,* e g, *erit etiam asymptotus C A hyperbolæ quadraticæ* f D F, *qua parte finitam aream definit, ad asymptoton C A hyperbolæ Apollonianæ* g D G, *in ratione minori qualibet data; qualem habet K D ad priorem C A, qua proportione mediat inter K D, & postremam C A; altioresque hyperbolæ, quæ parte finitam aream adhuc minorẽ cum asymptoto comprehendunt, habebunt, eadem ratione, asymptotos adhuc infinities minores, sive ad inferiorem gradum infinitatis consistentes. Similiter in Cissoide, in Correlata quadrantis, aliisque curvis asymptoticis, finitam areã comprehendentibus, observare erit, infinitã asymptoti longitudinem infinities minorem esse asymptoto hyperbolæ Apollonianæ.*



COROLL. IV. Hinc etiam elici potest modus investigandi, quando Spatium quoddam asymptoticum ArooG aream finitam comprehendat, quando verò infinitã, vel adhuc plusquam infinitam, respectu ordinarii loci hyperbolici inter asymptotos jacentis, intercipiat: Si nempe spatio ArooG fiat reciproca figura A*aar*, cujus scilicet ordinatæ *ra* contineant cum ordinatis *ro* rectangulum eidem constanti quadrato æquale; nam si tangens *ab* hujus figuræ reciprocæ quæratur, & ejus generalis expressio referatur

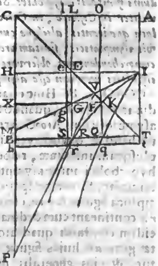


ad



ad verticem A, constabit certè, an ibi tangens AB fiat ordinatæ *ra* parallela, an verò cum ipsa concurrat, in distantia finita ab axe A*r*, an autem cum ipso axe A*r* penitus coincidat; & in primo casu Spatiũ A*roo*G finitũ erit: in secundo infinitum: in tertio plusquàm infinitum. Innotescit autem ratio tangentes ducendi ex dictis *coroll.* 2. *prop.* V. undè generatim liquet, reciprocarũ figurarũ semper æquales fore subtangentes, ad oppositã partè accipiendas.

SCHOLION III.



INfinitum esse Spatium *RIQ*, *quo secunda hyperbola extra primam exorbitat, sic ostendemus. Duæ hyperbolæ, Apolloniana, seu linearis IKR, & quadratica IQ, per idem punctum I, inter easdem asymptotos CA, CB, sint descriptæ. Ordinetur qualibet BRQT, secans lineas, ut in figura. Ducatur asymptoto CB parallela RG, occurrens in G recta IM, tangenti priorem hyperbolam ad punctum I; & ducta RP, tangente ejusdem ad punctum R (quæ producta alteram tangentem ferit in V) acceptoque in eadem prima hyperbola quamvis proximo puncto* r, *per illud agantur coordinatis parallelæ* brq, rSg; *necnon juncta CT secante primam hyperbolam in K, compleantur parallelogramma COKX, CBRL, AIHC. Jam propter AI,*

 sive

sive CH ad CB, ut BR, sive HE ad CA vel BT, erit parallelogrammum CHEL simile ipsi CBTA, adeoque circa eandem diametrum CT consistet; quare & CT erit diameter hyperbolæ RKI, ut potè bisecans subtensam RI, quæ altera diameter est parallelogrammi ERTI, quare eadem CT per tangentium occursum V transibit: ex 29. 2. Conic. Præterea cùm sit AC, sive BT, ad KX, ut BC ad CX, sive ut KX ad BR, erunt BT, XK BR in continua ratione, & BT vel HI ad tertiam BR, ut quadratum primæ HI ad quadratum mediæ XK; sed ex natura hyperbolæ secundæ, ut HI ad RB, ita & quadratum HI ad quadratum BQ, ergo XK æquatur BQ, & juncta QKO erit asymptoto parallela. Cùm sit autem GF (quæ ipsi RQ parallela ducitur ex puncto G, & à tangente RV in puncto F limitatur: nec enim semper coincidet GF cum ordinata KX, ut hoc loco Sculptor expressit] minor semper ipsa RQ, metiente intervallum parallelarum RG, QK; consequens est, ut major sit ratio RQ ad RG, quàm GF ad eandem RG, vel (ob similitudinem triangulorum FGR, RBP) quàm RB ad BP, aut RS ad Sr; ideoque majus erit rectangulum QR in Sr (nempe elementare spatium QqrR) rectangulo GR in RS (nempe spatio RrgG); quare & totum bilineum QIR majus erit trilineo RIMP: quod cùm sit infinitum [ob infinitatem asymptotici spatii primæ hyperbolæ] patet à fortiori infinitum fore & bilineum QIR; Quod erat demonstrandum.

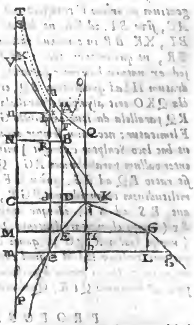
PROPOSITIO X.

Spatium Infinitum, idemque infinities minus Asymptotico Spatio Apollonianæ Hyperbolæ, reperire.

Ne quis suspicetur, spatium asymptoticum hyperbolæ Apollonianæ minimum esse omnium infinitorum spatiorum, quia nullam hactenus aream novimus infinitam, quæ aut ejusdem, aut superioris gradus non sit ad prædictum spatium: libet hoc loco aream describere, absolutè quidem infi-

infinitam, sed infinities minorem dicto asymptotico spatio Apolloniano: ex quo facile erit similes areas adhuc infinities minores excogitare, & assertam varietatem ordinis Infinitorum *fine ullo limite* (ut *prop. VIII.* prędiximus) admittendam ostendere.

Inter asymptotos CI, CV descripta sit hyperbola Apolloniana QAaT, abscindēs primam ordinatam QI ęqualem IC; & subtangente CI agatur Logarithmica IEe ad axem CP, cui parallela posita IH, fiat ad axem IH parabola IGg, cujus latus rectum sit duplum ipsius CI, & productis ejus ordinatis GH, gh, logarithmicę occurrentibus in E, e, ejusque axi in M, m, agantur ad axem parallelę EDA, eda; tum ut rectangulum ex ME in HG ad quadratum CI, ita sit eadem CI vel IQ ad DF, ac per omnia puncta F, f



sic determinata transeat curva OFfS. Dico spatium binis asymptotis parallelis IO, CS, curva OFfS, & recta CI comprehensum, absolutè quidem esse infinitum, sed infinities minus spatio hyperbolico CIQAaT.

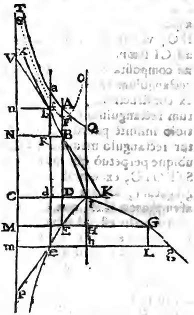
Facta enim DB æquali HG, itemque db æquali bg, atque ita semper, oriatur hinc alia curva IBbX; sintque AFBDEHG, afbdebg infinitè proximæ: erit ipsarum BD, bd differentia bR, ex constructione, æqualis differen-

tiæ

tiæ Lg correſpondentium HG, bg; eritque BR ad Rb, ut BR ad Lg, nempe in ratione compoſita ex BR, ſeu Dd differentia ordinatarum Logarithmicæ, ad Hb, ſive Mm differentiam axis ejuſdem, & ex Mm, ſeu GL differentia axis parabolæ ad Lg differentiam ordinatarum ejus; eſt autem *ex coroll. 2. prop. V.* prima ratio æqualis rationi ordinatæ ME ad ſubtangentem MP vel CI, & ratio altera æqualis rationi ſubtangentis parabolæ, ſeu duplæ IH, ad HG, vel duplæ HG ad latus rectum, aut ſimplicis HG, ad CI ſemiſſem lateris recti; ergo BR ad Rb eſt in ratione compoſita ex ME ad CI, & HG ad CI, ſcilicet ut rectangulum ex ME in HG ad quadratum CI, hoc eſt, ex conſtructione, ut CI, vel IQ ad DF; quare extremarum rectangulum ex FD in BR (quod eſt idem cum ſpatiolo infinitè parvo $FDdf$, *per coroll. 3. prop. V.*) æquabitur rectangulo mediarum IQ vel CI in Rb; quod cùm ubique perpetuò obtineat, manifeſtum eſt, totum ſpatium $SfFOIC$, ex omnibus areolis elementaribus $FDdf$ aggregatum, æquari rectangulo ex IQ vel CI in totam aſymptoton CX, quæ omnibus differentiis Rb ordinatarum æqualis eſt: adeoque cùm CX ſit infinita, utpotè æqualis ordinatæ parabolæ ad infinitam diſtantiam à vertice, patet, ſpatium illud $SfFOIC$ rectangulo infinito æquale probari, & ſic eſſe abſolutè infinitum: ſed hyperbolicum ſpatium $CIQAaT$ æquatur rectangulo ex eadem IQ, vel CI in totum axem infinitum CP Logarithmicæ (nam, *ex cap. 6. Hugenianorum n. 6.* ſubtangens CI eſt ad quamlibet DE parallelam axi Logiſticę, vel dicas CI quadratum ad CI in DE, ut parallelogrammum hyperbolę inſcriptū CDA, quod ęquatur quadrato CI, propter QI æqualem CI, ad ſpatium hyperbolicum $AQID$, quod exinde ęquabitur in hoc caſu rectangulo ex CI in DE, adeoque totum ſpatium aſymptoticum fiet æquale rectangulo ex CI in totum axem CP) erit ergo ſpatium $CIQAT$ ad ſpa-

tium SFOIC, ut infinitus axis Logarithmicæ, vel parabolæ, ad infinitam ejus ordinatam, sive ut hæc ipsa infinita parabolæ ordinata ad suum latus rectum; adeoque in ratione majori, quàm quælibet assignabilis, quarè inventum est spatium absolutè infinitum, sed idem infinities minus asymptotico spatio hyperbolæ Apollonianæ. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc obiter patet, curvæ I B b subtangentem K D esse ad ordinatam D B, ut rectangulum M E in H G, sive N C D B, ad quadratum C I: in hac enim ratione vidimus esse differentias B R, R b, quæ sunt subtangenti, & ordinatæ proportionales ex supradictis.



COROLL. II. Unde etiã extensa tangente *K* B ad asymptoton in V, erit pariter BN ad NV (seu sumpta communi altitudine NC, rectangulum NCDB ad rectangulum CNV) ut rectangulum NCDB ad quadratum CI; quare quadratum CI æquabitur CNV rectangulo, & subtangens N V æquatur constanti quadrato C I, diviso per abscissam N C, idest reciproca est abscissæ N C, aut dicas æqualis ordinatæ in puncto N ad hyperbolam T A Q, usque dum illi occurrat, continuatam, quippe quæ pariter ejusdem N C est reciproca.

COROLL. III. Si quis ex puncto B duceret curvæ I B b perpendicularem, foret subnormalis, post ordinatam B D

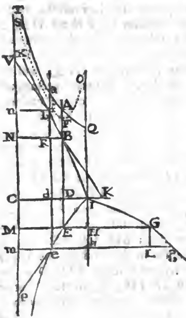
in

in ipſa DC producta ab hac perpendiculari reſecta, æqualis ordinatæ DA hyperbolæ: etenim eſt VN ad NB, ut BD ad DK, vel ut prædicta ſubnormalis ad ordinatam BD ſeu CN, adeoque rectangulum extremarum VNC [hoc eſt, *per præcedens corollar.* quadratum CIQ, vel rectangulum CDA, ob hyperbolam) æquatur rectangulo mediarum NB, vel CD in ſubnormalem, quare eadem ſubnormalis æquatur AD ordinatæ ad hyperbolam.

COROLL. IV. Unde ampliùs oſtendi poteſt, ſpatium hyperbolicum AQID æquari dimidio quadrati ex ordinata BD: poſita enim $CD = x$, $DB = y$, & dicta ſubnormali $= p$; erit p ad y, ut dy ad dx (nempe ut Rb ad RB) quare pdx [ſive, ob $p =$ AD, ſpatium ADda] $= ydy =$ dimidio differentialis $2ydy$, quæ *ex Schol. prop. V.* eſt differentia quadrati yy; & ideo, integrando, totum ſpatium AQID æquatur dimidio quadrati BD. Quod & hinc expeditiùs patet, quia ex oſtenſis in demonſtratione hujuſmet propoſitionis, ſpatium hyperbolicum AQID æquatur rectangulo ex CI in DE, vel IH, quadratum autem BD, vel HG, ex natura parabolæ, æquatur rectangulo ex eadem IH in duplam CI, quæ eſt latus rectum, ergo idem ſpatium hyperbolicum AQID eſt dimidium quadrati HG, vel BD.

SCHOLION

M*Anifeſtum eſt, curvam IB*b *eſſe Logarithmicam quadraticam, ex earum genere, quas* Hugenianorum cap. 1. n. 4. *indicavi, de quibus & egregium tractatum, geneſi à nobis perhumaniter accepta, conſcripſit inſignis Geometra* Laurentius Lorenzini, *quem utinam cum aliis tractatibus, res geometricas accuratiſſimè, & profundiſſimè illuſtrantibus, typis aliquando committeret! Enimverò patet, quòd cùm in prima Logarithmica IE* e *ſit ratio* IC, *ME ad rationem IC,* me, *ut*

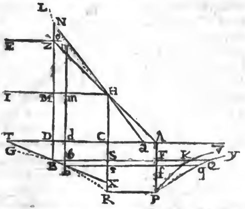


CM ad Cm, *vel IH ad Ih: cujus rationis subduplicata est ratio ipsarum HG*, hg, *seu BD*, bd, *patet fore BD ad* bd, *sive NC ad* nC, *in subduplicata ratione ejus, quam habet ratio duarum CI, NB ad rationem duarum CI*, nb; *aut illam rationem ad hanc esse, ut quadratum distantiæ CN ad quadratum distantiæ* Cn. *Similiter, si loco parabolæ quadraticæ IG* g *posita fuisset alterius altioris ordinis parabola, ex ejus ordinatarum HG translatione in DB, orta fuisset altioris adhuc ordinis logarithmica, ejusque tangens, & aliæ functiones simili investigatione detegerentur.*

PROPOSITIO XI.

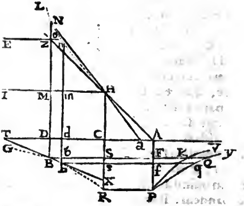
Q*Uadraticæ hyperbolæ cum Apolloniana specialior comparatio, ad ejus altiorem infinitatem demonstrandam.*

Sit inter asymptotos RCA [*ut in figura sequenti*] per angulum P quadrati RPAC descripta hyperbola Apolloniana PKV, & hyperbola quadratica PQY, in qua sit SQ ad RP, ut quadratum RC ad quadratum CS, vel ut quadratum SK ad quadratum RP, adeoque tres SQ, SK, RP sint perpetuò proportionales; descripta sit etiam ad axem ACT Logistica RBG, ad partes G decrescens, cujus



jus subtangēs TD ęquetur CR: itéq. facta CH æquali CR, ponatur HNL continuatio ejusdem Logisticæ, quæ ex R ad partes AP exporrigi debebat, ad easdem partes asymptoti CT reflexa, & eò versùs in infinitum se expandens. Itaq. ob æqualem, imò eandem axis portionem CD, ordinatis BD, CR, & CH, DN interceptam, erit semper DB ad CR, ut CR vel CH ad DN, sed etiam ut DB vel CS ad CR, ita in hyperbola Apolloniana RP (vel CR aut CH) ad SK, ergo DN æquatur semper correspondenti ordinatæ hyperbolicę SK: factaque *ndbsq* infinitè proxima priori; cùm sit SQ ad SK, ut SK ad RP, vel ut AC ad CS, vel ut TD ad DB, vel ut B6, aut D*d*, ad 6*b* vel *s*S, erit rectangulum extremarum QS*s* æquale rectangulo mediarum, scilicet SK, vel ND in D*d*, & sic semper, unde spatium hyperbolæ quadraticæ SRPQ *per coroll. 3. prop. V* æquale ostendetur correspondenti spatio Logistico NHCD; sed ex ostensis *in demonstratione prop. praeced. & in coroll. 3. prop. IX.* Spatium hyperbolicum SRPK æquatur rectangulo ex CR in logarithmum CS, scilicet in BS, hoc est, ducta HMI asymptoto parallela, æquatur rectangulo correspondenti CHMD, ergo spatia SRPQ, SRPK sunt semper ad invicem, ut NHCD, MHCD; & ubi punctum S cadit in C, erit totum spatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY ad spatiū Apollonianæ CRPKV,

ut



ut logisticum spatium TCHNL in infinitam amplitudinẽ TL infinitæ longitudini CT respondentem diffusum, ad rectangulum infinitè longum TCHI; sed illud est infinities majus hoc, nam ex ipso secari possũt quot quis voluerit æqualia rectangula infinitè longa TCHI, IMZE,&c. ergo & Spatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY est infinities majus spatio Apollonianæ hyperbolæ absolutè infinito CRPKV, adeoque jure potuit à VVallisio *Plusquam infinitum* nuncupari. Quod erat &c.

COROLL. I Cùm *ex nostris Hugenianis cap.* 3. *n.* 6. Spatia Logistica æquè alta NDCH, BDCR sint ad invicem, ut homologæ ordinatæ CH, BD, sive ut rectangulum CHMD ad rectangulum CDBS, & permutando spatium NDCH ad CHMD, hoc est, juxta hanc propositionem, spatium SRPQ ad SRPK, erit, ut spatium logisticum BDCR ad inscriptum rectangulum CDBS.

COROLL. II. Extensa tangente TB usque ad CR in X, quoniam ex dictis *Hugenianor. cap.* 7. *n.* 3. & *cap.* 10. *n.* 8. rectangulum CDBS æquatur rectangulo subtangentis DT, vel CR in SX, & spatium BDCR *ex ibidem dictis cap.* 4. *n.* 3. *& cap.* 8. *n.* 14. æquatur rectangulo ejusdem subtangentis in SR, erit itaque spatium SRPQ ad spatium SRPK ut SX ad SR.

COROLL. III. Unde rursus liquet, integrum spatium hy-

hyperbolæ quadraticæ CRPQY esse infinities majus spatio Apollonianæ CRPKV, adeoque *plusquam infinitum* censendum; etenim ubi S cadit in C: tum rectangulum CDBS evanescit, aut saltem fit infinitè minus spatio integræ logisticæ TCRBG, seu quadrato subtangentis CR: tum ipsa SX evadit infinitè parva respectu SR, quæ tunc fit CR; undè spatiũ hyperbolę Apollonii CRPKV, evadat infinities minus spatio hyperbolæ quadraticæ CRPQY necesse est.

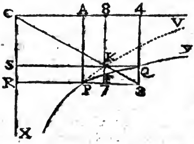
COROLL. IV. Rursus, quia spatium SRPQ ad SRPK ostensum est esse, ut NDCH ad MDCH; est autem NDCH æquale rectangulo ex subtangente logisticę CH in MN, erit primum spatium ad secundum, ut NM ad MH; sed NM ad MH potest rationem habere majorem qualibet assignabili, si concipiatur accedere magis, ac magis punctum S ad centrum C, adeoque ab eodem C magis ac magis recedere ordinata logisticæ DN, nam MN ultra tangentem HZ, quæ ad angulum semirectum ZHM, sive HAC inclinatur, in immensum exscrescit, unde ratio NM ad MZ, vel MH, semper fit major, prout (juncta NH*a*) fit semper sine limite major ratio HC ad C*a*; ergo NM evadit infinities major, quàm MH, ubi punctum S cum puncto C convenerit, & ideo spatium CRPQY erit tunc infinities majus ipso CRPKV, ac proinde *plusquam infinitum* hac etiam ratione colligitur.

SCHOLION.

EX ostensis in hac propositione, quòd DN, ordinata figuræ HNL, fit semper æqualis correspondenti SK, ordinatæ hyperbolæ PKV, colligitur expeditus modus generalis describendi datæ cuilibet figuræ RBG suam Reciprocam HNL: descripta enim hyperbola Apolloniana PKV, quia semper rectangulum CSK æquatur ipsi CRP, fit, ut si ad puncta D, C ordinentur ipsę DN, CH æquales respectivè ipsis SK, RP, utique etiam rectangula NDB, HCR æquentur, adeoque figura HNL evadat Reciproca ipsius RBG. PRO-

PROPOSITIO XII.

Idem aliter rursus, ad abundantiorem scientiam, demonstrare. Iisdem positis, ducatur C *K*, conveniens cum R P producta in 3, & jungatur 3 Q occurrens asymptoto C A in 4; eritque R 3 ad S *K*, ut R C ad C S, ut S *K* ad R P, vel ut S Q ad S *K*; igitur æquales erunt *K* 3, S Q, unde 3 Q 4 erit asymptoto R S C parallela, cui per *K* æquidistans pariter fiat 7 *K* 8; Jam verò ex demonstratis *cap.* 8. *Hugenianorum*, *n.* 11. Spatium infinitè longum, ab hyperbola quadratica P Q ad partes asymptoti S R versùs X infinitè producta comprehensum, est finitæ quantitatis, & semper æquatur inscripto rectangulo eidem ordinatæ adiacenti, nempe RSQPX æquatur CSQ4, & solum R P X æquatur C R P A, vel huic æquali C S K 8; ideoque utriusque differentia, nempe spatium SRPQ æquatur residuo 8 4 Q K, vel æquali complemento S K 7 R, quod eidem latitudini S R adiacet cum spatio SRPQ, sed longitudinem habet æqualem applicatæ correspondenti S K hyperbolæ Apollonianæ, atque ita semper; ergo ubi congruerit S K asymptoto C A, fiet integrum spatium C R P Q Y æquale rectangulo ex C R in asymptoton hyperbolę Apollonii CAV; sed hoc rectangulum, *ex prop. VIII. n.* 2. est infinities majus spatio asymptotico hyperbolæ Apollonii, ergo spatium C R P Q Y quadraticę hyperbolę est infinities majus dicto spatio Apollonianę hyperbolæ, unde à Cl. VVallisio jure *Plusquàm Infinitum* dici potuit. Quod erat &c.



CO-

COROLL. I. Ex quo spatium SRPQ ostensum sit æquale rectangulo SK7R, ablato communi SRPEK, erit KEQ = ipsi KEP, & apposito communi 7EQ3, fiet PEQ3 æquale K73Q.

COROLL. II. Unde & spatium SRPQ ad PEQ3 erit, ut 8KQ4 ad 7KQ3, nempe ut CS ad SR, & componendo, RSQ3 ad PEQ3 erit, ut CR ad RS, ac per conversionem rationis, RSQ3 ad SRPQ, ut CR ad CS.

COROLL. III. Quia verò spatium SKPR = rectangulo ex CR in logaritmum CS (*vide fig. pag.* 70.) nempe in SB *ex coroll.* 3. *prop.* IX. erit SKPR ad SQPR in ratione composita ex CR, vel RP, ad SK, & ex logarithmo CS, nempe SB, ad SR, idest in composita ratione ex SC ad CR, & SB ad SR, hoc est ut rectangulum Logisticæ inscriptum CSBD ad rectangulum ex CR in RS, sive ad Logisticum spatium CDBR: quod consonat jam ostensis *coroll.* 1. *prop. praced.* unde rursus eadem inferri possunt, quæ deinceps in sequentibus corollariis demonstrata sunt de *altiori Infinitate* hujus spatii.

SCHOLION.

H*Actenus multipliciter probavimus diversitatem ordinis Infinitorum a Varignonio controversam, idque iis argumentis, quibus subesse posse hallucinationem, de sumenda expressione spatiorum ejusmodi ad contrarias partes, omninò non video; hac enimverò exceptione Vir gravissimus usus est adversùs VVallisium, scilicet ipsum non observasse, negativum valorem arearum hyperbolicarum superiorum Apollonianarum, non indicare altiorem infinitatem ipsarum, sed contrariam duntaxat positionem, adeout finitam quidem quantitatem exprimat, sed ad oppositas partes accipiendam: quod ipsum antea monuerat* Georgius Cheynęus *Collega noster, libro Londini impresso* 1703 De Methodo Fluxionum inversa, pag. 66. *his verbis*: Quodsi quadraturæ ex-

preſſio affirmativa fuerit, area adjacet tam abſciſſæ, quàm ordinatæ: ſin negativa fuerit, cadit ad partes contrarias, & adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ: *ubi etiam ſtatim ſubdit exemplum* infinitarum hyperbolarum. *Quam ſanè legem nos minimè improbamus, & ſaltem in hyperbolarum caſu (ex accidentine, an ſuapte generali natura, hic non inquiro, ſed vide dicenda infra* in Epiſt. ſubjuncta poſt Lemm. 12.) *obtinere fatemur: quemadmodum & idem, independenter à Cheynai libello ipſis nondum viſo, animadvertendum cenſebant anno* 1704 *Doctiſſimi Viri, quos Bononiæ conveneram, & quibuſcum de hac Infinitorum materia, deque natura negativarum quantitatum in Marſiliano Muſæo diſſerebam, videlicet* Euſtachius Manfredi *Matheſeos Profeſſ. celeberrimus, &* Victorius Stanchari, *quem Geometria, Analytica, Phyſica, & Aſtronomia ſibi nunc [heu nimis immatura!] mortis invidia præreptum dolent; neque tamen magnitudinum pluſquàm infinitarum exiſtentiam negabat ullus ipſorum, ſed varios infiniti gradus exprimendos potius arbitrabatur Stancharius per rationem* aa *ad* o, *aut* a^3 *ad* o, *vel* a^4 *ad* o *&c. (ſeu per duplicatam, triplicatam, quadruplicatam &c. rationis ſimpliciter infinitæ* a *ad* o) *quàm per rationem poſitivi ad negativum,* a *ad* $-$ 1, *vel* a *ad* $-$ 2; *neque enim ſignum negativum reddere quantitates nihilo minores, ut multis ratiocinüs confirmabat, ſed ad partem oppoſitam duntaxat retrocedentes: quare & expreſſionem negativam hyperbolarum pluſquam infinitarum, verificari ſatis, accipiendo ipſarum aream ad plagam oppoſitam, ubi valor ipſarum finitus eſt. Extant adhuc apud me doctiſſimi Juvenis epiſtolæ, quas poſt meum in Ethruriam reditum,* 13 *Junii,* 10, *&* 24 *Julii dicti anni* 1704, *his de rebus tranſmiſit, ut ſententiam ſuam clariùs exponeret. Sed, hac doctrina admiſſa, non ideò conceſſerim Varignonio, aut* Pluſquam infinitum *contradictionem involuere, cùm aliunde, quàm per quantitatum nihilo minorum expreſſionem probari poſſit, aut in aſſertione hyperbolarum pluſquam infinitarum hallucinatum propterea fuiſſe VVallisium, quòd non animadverterit,*

terit, negativas quantitates, aream contraria positione accipiendam significare: nam in Algebra sua cap. 66, & 67 *expressè hanc doctrinam ipsemet VVallisius firmaverat, & disertis verbis* Volum. 2. Op. Math. pag. 286. *dixerat*: Impossibile est, quantitatem ullam negativam esse, impossibile est enim, ut ulla magnitudo sit minus quàm nihil, aut ullus numerus paucior quàm o. Nec tamen est ea suppositio aut inutilis, aut absurda, modò rectè intelligatur. Quamvis enim quoad puram notationem algebricam, innuere videatur nota — magnitudinem, quæ minor sit, quàm nihil; cùm tamen physicam subit considerationem, magnitudinem non minùs realem denotat, quàm ipsum †; Sed sensu suppositioni contrario interpretandam. Verbi gratia siquis promoveri supponatur 5 passibus; atque tum retrocedere passibus 2; atque tum interroget quispiam, quantò promotior sit factus? Dicetur 3 passibus promotior, propter $5 - 2 = 3$; si autem, postquam processerat 5 passibus, retrocedat passibus 8; atque tum interroget quis, quantò sit promotior? respondebitur $- 3$ passibus (propter $5 - 8 = - 3$) hoc est tribus passibus minùs promotus &c. *Quod & aliis exemplis geometricis deinceps ostendit; itaque non inficiatur VVallisius, negativas quantitates oppositum situm respicere, quoties datam habent positionem, ut qualibet physica, & geometrica magnitudines habent: at si de numeris purè abstractis sermo sit, qui à situ non pendent, quomodo eos Algebra versat: hoc modo, inquam, cur minores nihilo dici non debeant numeri negativi, cùm resultent ex majorum subtractione à minoribus? Si* 4 *ex* 7 *subtraho, video relinqui* †3; *si* 4 *ex* 4 *aufero, relinqui* o, *seu merum nihil; si* 4 *ex* 1 *auferam, an non minus quàm nihil supererit? an contendam superesse idem, quod superest ablatis* 4 *ex* 7? *hoc certè dicendum foret, si* — 3, *quod est residuum subtractionis* 4 *ex* 1, *positivè accipi deberet pro tribus unitatibus majoribus nihilo, sed inversum situm* [*quem vero situm in his abstractis à materia, & à loco mihi fingam?*] *servantibus. Quidquid id est, inductum*

saltem à VVallisio, & à præstantissimis Geometris admissum, altiorem Infinitatis Ordinem, hac una Varignonii exceptione [tametsi undecunque solida] non infringi, manifestum est, quippe argumentis tali exceptioni minimè obnoxiis, & ab ejusmodi tricarum, circa negativæ quantitatis naturam succrescentium, controversia non pendentibus, ejusmodi causā hactenus multipliciter propugnatam, & abundè confirmatam hìc dedimus. Tanta enimverò semper apud me fuit Cl. Varignonii auctoritas, ut neque uni duntaxat ratiunculæ fidens ab ejus sententia discesserim, nec nisi postquam, in omnem partem hoc argumento versato, sibimet ubique constans altioris Infinitatis testimonium inde multipliciter exprimere potui, VVallisianæ doctrinæ manus dederim, nec prætermiserim à primis usque initiis suis magni hujus mysterii rationem ex ordine deducere; & cùm Vir. Cl. cui per æstivas ferias hunc Tractatum legendum obtuleram, anceps adhuc animi (quòd nonnulla, quæ ex nostro Hugenianorum Theorematum tractatu, abs se non ante perlecto, pendebant, sibi obscuriora visa fuissent) sententiam suspenderet; prolixa Epistola, in qua expressam Lemmatum omnium huc pertinentium demonstrationem, aliunde quàm ab elementis planis, & conicis non pendentem, proposui, & controversa hyperbolica spatia Plusquam infinita *verè censenda esse inde rursus conclusi, illum denique ad assensum mirabilis hujus veritatis adegi, atque omnem deinde ipsi scrupulum, unam vel alteram difficultatem mihi objectam expediens, penitus ademi. Itaque hanc ipsam Epistolam, Lectorum meorum usui pariter profuturam, hìc adnectere placuit, opportunam huic Tractatui coronidem hac Appendice impositurus.*

EPI-

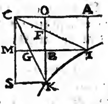
EPISTOLA GEOMETRICA

Ad Illustrissimum Equitem

D. ASCANIUM LIPPI

ARETINUM.

Reditum tibi in Patriam prosperum gratulor, Vir Illustrissime, teque acriori, quàm antea, studio Geometricarum, ac Mechanicarum rerum contemplationi animum impendere decrevisse, lætus accepi. Interim verò obscuriorem tibi accidisse non paucis in locis Tractatum nostrum, *De Infinitis Infinitorum, atque Infinitè parvorum Ordinibus*, quem superioribus æstivis feriis tibi legendum obtuli, mirari desino, postquàm retulisti, Hugeniana nostra, ex quibus multæ harum demonstrationum pendent, à te minimè hactenus fuisse perlecta; Ne tamen animo despondeas, ad hujus enim admirabilis Veritatis lucem, quam tantoperè tibi manifestari desideras, me facem preferente, statim admitti poteris, ubi nonnullis Lemmatibus id omne supplevero, quod nostræ demonstrationis progressus aliunde perspectum supponit; sit ergo.



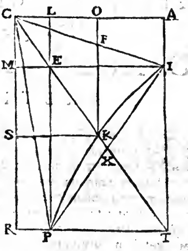
LEMMA I. *Ex punctis quibuslibet I, K Hyperbolæ Apollonianæ K I, ductis alteri asymptoto parallelis I A, K O, junctisque ad centrum C rectis I C, K I, erit sector hyperbolicus* K C I *æqualis quadrilineo* O A I K.

Nam parallelogrammorum C A I M, C O K S (*ex* 12. 2. *conic.*) æqualium,

dimi-

dimidia ſunt triangula C A I, C O K, quæ ideò æqualia ſunt, & communi ablato triangulo C O F, appoſitoque utrinque trilineo F I K, manifeſtum eſt, ſectorem K C I æquari quadrilineo P A I K.

COROLL. Hinc patet quadrilinea KIAO, K I M S eidem ſectori C I K, adeoque & invicem eſſe æqualia.



LEMMA II. *Sint in aſymptoto C A tres rectæ proportionales C L, C O, C A, & ad hyperbolam ordinentur alteri aſymptoto parallelæ L P, O K, A I: Erit punctum K vertex portionis P K I.*

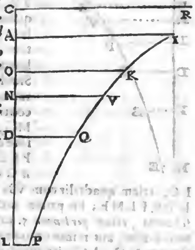
Completis parallelogrammis, ut in figura, erit ex natura hyperbolæ, C L ad C O, ut reciprocè O K ad L P, quare etiam ipſa C O ad C A, ut O K ad A T: & ideò parallelogrammum C O K S erit ſimile ipſi C A T R, & circa eandem diametrum C T (*26. 6. elem.*) conſiſtet; ſimiliter cùm ſit O K ad A I, vel ipſi parallelam L E, ut A C ad C O, vel C O ad C L, erit & parallelogrammum C L E M circa eandem diametrum ipſorum C O K S, C A T R; & quia E T, P I ſunt diametri parallelogrammi E I T P, ſe mutuò ſecabunt in X; Igitur recta C X, quæ ex centro biſecat applicatam P I, diameter erit portionis, & per ejus verticem tranſibit; oſtenſa eſt autem tranſire per punctum K, ergo K eſt vertex dictæ portionis.

LEMMA III. *Iiſdem poſitis, quadrilinea A I K O, O K P L, quæ ordinatis ad terminos continuè proportionalium intercipiuntur, æqualia erunt.*

Nam

Nam & triangulum XCI æquatur XCP, & portio XKI æqualis est portioni XKP, cùm diameter KX bisecet applicatam PI, & portionem PKI: quarè sectores KCI, KCP, adeoque & quadrilinea AIKO, OKPL, *ex lemm.* 1. æquabuntur.

LEMMA IV. *Si fuerint LC, CD, & OC, CA proportionales, ordinatis inde ad hyperbolam LP, DQ, & OK, AI, intercepta quadrilinea LPQD, OKIA pariter æqualia erunt.*



Sumpta inter DC, OC media proportionali NC, hæc media erit etiam inter LC, AC propter rectangulum LCA æquale ipsi DCO, seu quadrato CN; ergo ordinata NV, erit *ex lemm. præced.* quadrilineum ANVI æquale quadrilineo NLPV; itemq. ONVK æquale NDQV; quare & residua AOKI, DLPQ æqualia manebunt.

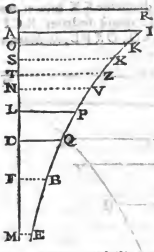
LEMMA V. *At si major, aut minor foret ratio LC ad CD, quàm OC ad CA, esset quadrilineum LPQD majus pariter, aut minus, ipso OKIA.*

Quippe aucta CL, augeretur primi quadrilinei extensio, & illa decrescente hæc pariter minueretur.

LEMMA VI. *Ordinentur ad hyperbolam duæ qualibet AI, OK, & duæ aliæ LP, DQ, erit ratio duarum OC, CA ad rationem duarum DC, CL, ut quadrilineum IAOK ad PLDQ.*

Multiplicetur enim utcunque ratio duarum OC, CA,

sum-

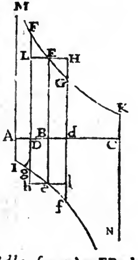


sumptis quotlibet continuè proportionalibus SC, TC, NC, quibus respondebunt, *per lemma* 3. æqualia quadrilinea prioribus ordinatis, aliisque SX, TZ, NV interiecta; adeò ut quàm multiplicata fuerit ratio NC, AC rationis OC, AC, tam multiplex resultet quadrilineum NVIA quadrilinei IAOK. Similiter multiplicata utcunque ratione DC, LC per quotlibet continuè proportionales PC, MC, ostendetur æquè multiplex fore quadrilineum PLME ipsius PLDQ: & quidem si ratio NC, AC æqualis fuerit rationi MC, LC, etiam quadrilineum VNAI *per lemma* 4. fiet æquale ipsi PLME; sin prima ratio major, aut minor fuerit secunda, etiam *per lemma* 5. primum quadrilineum fiet altero majus, aut minus; quare ut ratio OC, AC, ad rationem DC, LC, ita quadrilineum IAOK ad ipsum PLDQ, cb antecedentium æquè multiplicia præfato modo respondentia æquè multiplicibus consequentium, ut exigit terminorum proportionalitas *ex def. 6. 5. elem.*

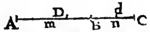
LEMMA VII. *Si recta AC (ut in fig. sequenti) secta utcunque in B, iterum secetur in D, inter A & B, aut in d, inter B, & C, erit ratio duarum BA, DA ad rationem duarum DC, BC in majori proportione, quàm BC ad AB: at ratio duarum dA, BA ad rationem duarum BC, dC in minori proportione erit, quàm BC ad AB.*

Per terminos A, C ductis parallelis KCN, IAM, & facta CK æquali AI, ex K, & I ducantur duæ hyperbolæ æquales KGEF, Igef, inverso situ positæ in angulis asym-

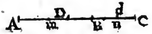
asymptoticis CAM, ACN, ad quas ordinata per punctum B recta EB*e*, reliquis asymptotis parallela, & per puncta D, *d* pariter ordinatis FD*g*, G*df*, per puncta E, *e* ducantur ipsi AC parallelæ LEH, *leb*; eritque *per lemma 6.* ratio duarum BA, DA, ad rationem ipsarum DC, BC ut spatium FEBD ad DB*eg*, hoc est in minori ratione, quàm [diminuto antecedente, & aucto consequente] quæ sit parallelogrammorum EBDL, *e*BD*b*, sive quàm EB ad B*e*, aut BC ad AB (nam æqualia sunt parallelogramma æqualibus hyperbolis inscripta EBA, *e*BC, adeoque latera habent reciproca) At è contrario ratio duarum *d*A, BA ad rationem ipsarum BC, *d*C est *ex eodem lemm. 6.* ut EG*d*B ad B*dfe*, quæ ratio minor est, quàm (aucto antecedente, & minuto consequente) parallelogrammorum EH*d*B, B*dle*, seu quàm EB ad B*e*, scilicet BC ad AB; & igitur major est in primo, & minor in secundo casu proportio dictarum rationū, quàm sit ratio partium BC, AB, ut fuit propositum.



LEMMA VIII. *Esto AB ad BC in ratione qualibet*, m *ad* n. *Dico, factum ex potestate ipsius AB, cujus index* m, *in potestatem ipsius BC, cujus index* n, *esse omnium similium maximum, idest majus, quàm si, alibi secta AC in D vel* d, *sumeretur factum ex similibus earum partium potestatibus per eosdem indices denominatis*.

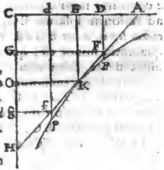


Nam quia ratio duarum AB, AD ad rationem duarum DC, BC est in minori proportione, *per lemma 7.* quàm BC ad AB, idest quàm *m* ad *n* per hypothesim, erit fa-



ctum extremorum majus facto mediorum ideſt ratio duarum A B, A D multiplicata per m [ſeu ratio $\overline{AB}^m$ ad ipſum $\overline{AD}^m$] major erit ratione DC, CB multiplicata per n [hoc eſt ratione $\overline{DC}^n$ ad $\overline{CB}^n$] unde rurſus factum extremorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{CB}^n$ majus erit facto mediorum $\overline{AD}^m$ in $\overline{DC}^n$. Similiter oſtendetur, quòd cùm ſit rationis duarum dA, A B, ad rationem ipſarum BC, dC, minor proportio, quàm BC ad AB, ſeu quàm n ad m, erit prima ratio multiplicata per m (hoc eſt $\overline{dA}^m$ ad $\overline{AB}^m$) minor ſecunda multiplicata per n (ideſt $\overline{BC}^n$ ad $\overline{dC}^n$) & ideò factum extremorum $\overline{dA}^m$ in $\overline{dC}^n$ minus erit facto mediorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$; quare ipſum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$ eſt omnium ſimilium maximum.

LEMMA IX. *Inter aſymptotos ACH ſit qualibet ex infinitis hyperbolis PK*p, *cujus ea proprietas, ut poteſtas ordinatæ KB denominata ab* m, *ad ſimilem alterius ordinatæ PD poteſtatem, ſit reciprocè, ut quævis poteſtas abſciſſæ à centro DC, cujus index* n, *ad ſimilem abſciſſæ BC poteſtatem. Dico, quòd ſi fiat AB ad BC, ut* m *ad* n, *juncta AK hyperbolam tanget in K.*

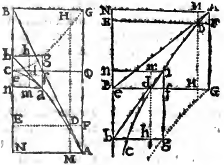


Occurrat AK ordinatæ PD in F; eritque factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ ad factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, ut $\overline{BK}^m$ ad $\overline{BA}^m$, ſive ut $\overline{DF}^m$ ad $\overline{DA}^m$, vel ut productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$ ad productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$; atqui $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, *ex lemm. præcedenti*, cujus hypotheſi caſus hic congruit, majus eſt quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$, ergo (*per* 14. 5. *elem.*) etiam $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ (vel $\overline{CD}^n$ in $\overline{DP}^m$, ipſi æquale, ob reciprocam poteſtatum rationem) majus eſt quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$; major eſt igitur DP, quam DF, & ideò

pun-

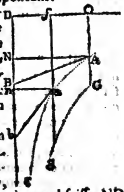
punctum hyperbolæ P eſt ultra rectam K A, idque ubique contingit, ergo A K in ſolo puncto K hyperbolæ occurrit, ipſamque tangendo prætergreditur.

LEMMA X. *In qualibet figura C A N, ſi ad terminos A*, a *ordinatarum AN*, an, *ordinentur recta AG*, a g *axi B N parallela, æquales verò reſpectivis ſubtangentibus NB*,nb, *erit figura* Gga*A æqualis figura A*anN, *cui correſpondet*.



Has figuras *cap.* 8. *Hugenianor. n.* 2 Correlatas appellabam, earumque æqualitatem (ſuppoſitis infinitè proximis G A N, HDE) demonſtravi *ex* 43. 1. *elem.* propter æqualia Elementaria parallelogramma DFGH, DENM, itemque *dfgh*, *denm*, quæ ſunt complementa parallelogrammorum circa diametrum A B, ſive *ab*. Quare conſtat propoſitum.

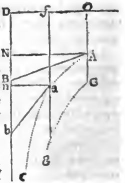
LEMMA XI. *Eſto A*a*C qualibet ex infinitis hyperbolis ſupra deſcriptis, & ſint poteſtates ordinatarum A N*, a n, *quarum index* m, *reciproca poteſtatibus abſciſſarum* n *D*, *N D*, *quarum index* n, *& ducantur A O*, a f *ordinata ad aliam aſymptoton*: *erit ut* m *ad* n, *ita quadrilineum N A* a n *ad quadrilineum O A* a f.



Extenſis enim O A, *f a* ad G, & *g* in ratione *n* ad *m*, fiat alia hyperbola ejuſdem generis G *g*, quæ erit correlata priori, *ut in lemm.* 10. eo quòd AG, *a g* æquentur ſubtangentibus N B, *nb*, ad quas abſciſſæ ND,

 nD

*n*D [æquales ipsis OA, *fa*] pariter sunt *ex lemm.* 9. in ratione *n* ad *m*; quare spatium A*ag*G æquatur *ex lemm.* 10. spatio A*an*N; est autem A*ag*GN ad A*af*O in ratione *m* ad *n* (cùm ejusmodi sit ratio quarumvis ordinatarũ GA, AO, & *ga*, *af*) quare & spatium NA*an* ad spatium OA*af* est semper in ratione *m* ad *n*.



LEMMA XII. *Iisdem positis, erit totum spatium DOaC ad portionem NAaC, ut* n *ad* m; *& dividendo rectanguli DOAN ad spatium NAaC, ut* n − m *ad* m.

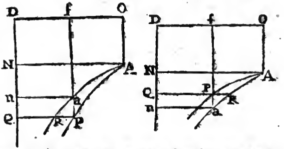
Ubi enim *af* infinitè proxima fiet asymptoto DN, spatium OA*af* degenerabit in DOA*a*C, & spatium NA*an* in NA*a*C, quarè cùm ejusmodi spatia OA*af*, NA*an* sint ut *n* ad *m*, patet integra quoque DOA*a*C, NA*a*C esse in eadem ratione, & dividendo inscriptum rectangulum ad subsequentem aream fore, ut *n* − *m* ad *m*;

Nimirum si *n* sit major ipso *m*, in ratione assignabili, quam habet ipsorum differentia ad datum *m* (ut propterea in hoc casu sit utriusque areæ finita ratio); si *n* æquatur *m*, ut in hyperbola Apolloniana, ratio prodibit infinitè parva o ad 1. [unde in hoc casu area hyperbolica infinitè major est inscripto parallelogrammo] sin fuerit *n* minor ipso *m*, habebitur ratio minor quàm infinitè parva, quę scilicet foret negativi numeri minoris nihilo (appello *minorem nihilo* in hoc casu negativum numerum, quia non applicantur nunc numeri ad certas quantitates, aliquam datam positionem servantes, ut ad oppositam plagam inverti possint, sed absolutè considerantur, & in abstracto, tamquam exponentes, qui rationes quantitatum repræsentant, independenter à quolibet ipsarum situ) ad unitatem, vel alium numerum positivum (unde tunc aream hyperboli-

bolicam plusquam infinities superare inscriptum parallelogrammum Cl. VVallisius contendit) putà si n existente 1 fuerit m æqualis 2, fiet parallelogrammi ratio ad aream hyperbolicam quæ -1 ad 2: si fuerit m æqualis 3, fiet illa ratio -2 ad 3, atque ita deinceps; quas quidem rationes, patet non esse subduplam, aut subsesquialteram, intercedentem inter aliquem ex terminis, qui comparantur, inverso situ acceptum (ut prætendit Varignonius) & reliquum eodem loco manentem, licèt hoc ipsum verificari contingat, quia nempe area N A a C ad reliquam DNAV, quæ, trans ordinatam, ad partes oppositas vergit, semper invenitur esse, ut $m-n$ ad $n-m$ [ut facilè deducitur ex præmissis, & utramlibet ad inscriptum parallelogrammum, velut ad m, comparando] itaque alterutra est ut differentia exponentium negativa, vel positiva, nempe si m superet n numero b, erit prima ad secundam ut b ad $-b$, sin major fuerit n, quàm m eadem differentia, erit illa ad hanc ut $-b$ ad b, cùm simili lege utraque area ad utramque asymptoton referatur, mutatis dumtaxat ordinatarum potestatibus in potestates abscissarum, & contra; Sed quemadmodùm in casu Apollonianæ Hyperbolæ, cujus ratio ad inscriptum parallelogrammum est n ad $n-n$, sive 1 ad 0, non contendit Varignonius, consequens rationis 0 indicare in antecedenti *nullam magnitudinem* (quasi in ipsam ordinatam AN, unde originem ducit, contraheretur area hyperbolica) sed *absolutè infinitam*, licèt interim in rebus physicis, aut geometricis quantitatibus, datam positionem, ex determinata origine, servantibus, quoties contingit, quantitates illas, puta a, & b, invicem æquari, tunc $a-b$ æquetur 0, & in nihilum abeat, sive retrocedens exactè quantitas b ad præcitatam originem ipsius a nec citra consistens, nec ultra procurrens, in ejusdem a principium contrahatur, ibique, in non quantum sui generis degenerans, evanescat: ita in casu altiorum hyperbolarum, ubi ratio paral-

parallelogrammi ad aream hyperbolicam subsequentem est $n-m$ ad m, sive -1 ad 2, aut -2 ad 3 &c. non videtur præsumendum, ex negativo antecedente, indicari consequentis areæ transpositionem faciendam ad aliam partem ordinatæ, ut passim in magnitudinibus situm habentibus, si ex fixa origine in determinatam plagam protenduntur a, & b, sitque illa minor, hæc major differentia c, itaut $b = a + c$, tunc $a - b = a - a - c = -c$, & hæc est positiva quantitas retrorsum ab origine computata, in adversam partem ab illa, versùs quam se extendere a, & b supponebantur; Sed imò hinc concludere licet, dictum parallelogrammum ad consequentem aream, ut minus quàm nihil, comparari, adeo ut hæc illud superet plusquàm infinitè: quin potius, si negativa expressio quidpiam invertendum concluderet, ipsum parallelogrammum, quod est homologus comparationis terminus quantitatis negativæ -1, aut -2, situm mutare deberet, non area hyperbolica, quæ homologa est positivo termino m exprimenti 2, aut 3 positivas unitates; quemadmodum in expressione Apollonianæ hyperbolæ, ad quam dictum parallelogrammum est, ut o ad 1, idem parallelogrammum, velut nihilum reputatur respectu areæ infinitæ hyperbolicæ, non è contrario area hyperbolica in nihilum degenerat: sed hæc obiter dicta sint in VVallisiani argumenti defensionem, cujus causa tamen ab hoc puncto non pendet, cùm nec mihi propositum sit ab ejusmodi analytica expressione variorum infinitatis graduum evidentiam repetere (qui sanè hinc non satis commodè elicerentur, alteram aream hyperbolicam alteri superioris ordinis comparando, & in hoc tantùm VVallisii ratio deficere videtur) sed potius geometrica ostensione, ut videbimus, quæ hanc negativi signi ambiguitatem nihil moratur.

LEMMA XIII. *Per idem punctum A transeant duæ hyperbolæ, Apolloniana A a R, & quædam alia A P, cujus ordinatarum PQ pote-*



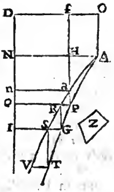
potestas m *reciprocè respondeat abscissis DQ, & ex quolibet ejus puncto P ad asymptotos parallela agatur PQ, Pf, occurrentes priores hyperbolæ in R*, a : *erit trilineum RAP ad trilineum AaP, ut* m *ad* 1.

Cùm in hyperbola Apolloniana quadrilinea $AanN$, $AafO$ sint æqualia [*per coroll. lemm.* 1. *sive ex lemm.* 11. ob indices m, n æquales, quibus dicta spatia proportionantur] apposito, aut dempto communi trilineo PaA, fiet spatium $NAPan$ æquale $PfOA$; sed $PANQ$ ad $PfOA$, *per lemm.* 11. est, ut m ad n, sive, in hoc casu, ut m ad 1; ergo idem $PANQ$ etiam ad $NAPan$ erit, ut m ad 1: sed etiam $QRAN$ ad $NAan$ est ut ratio duarum nD, DN, *per lemm.* 6. scilicet pariter ut m ad 1 (quia prima ratio semel accepta æquatur secundæ per m multiplicatæ, cùm ex hypothesi sit QD ad DN, ut $\overline{NA}^m$ ad $\overline{QP}^m$ vel $\overline{na}^m$, idest ut $\overline{nD}^m$ ad $\overline{DN}^m$) ergo & reliquum RAP ad reliquum AaP est in eadem ratione m ad 1. Quod erat &c.

COROLL. Hinc constat, dividendo in prima figura, esse RPa ad AaP, ut $m-1$ ad 1: at in secunda figura, esse RPa ad AaP, ut $1-m$ ad 1; & RaP ad RPA in prima figura esse, ut $m-1$ ad m: at in secunda figura esse, ut $1-m$ ad m, unde si in primo casu m æquatur 2, vel in secundo m æquatur dimidio unitatis [hoc est sit exponens radicis quadratæ] patet, rectam Pa primæ figuræ, bifariam dividere trilineum ARP, & rectam RP secundæ figuræ, similiter bifariam secare trilineum AaP.

LEM.

LEMMA XIV. *Iiſdem poſitis, ex bilineo RAP utrique hyperbolæ interſecto, magnitudinem data qualibet finita quantitate Z majorem ſecabimus.*

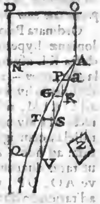


Sit primò numerus *m* major unitate, & tunc ducta quavis P*a* aſymptoto DQ parallela, multiplicetur ratio *m* ad 1, uſquedum æqualis, aut proximè major evadat ratione Z ad AP*a*; ſitque ratio ſic multiplicata eadem, quæ producti ex numero *r* in *m*, ideſt *rm* ad 1. Tum ducta PR aſymptoto DO parallela, agatur RG parallela DQ, deinde SG, ST, TV alternatim aſymptotis parallelæ, idque in tot punctis P, G, T continuetur, quoties multiplicata fuerit ratio *rm* ad 1 rationis *m* ad 1. Quia igitur ſpatium AVT ad ſpatium AP*a* rationem habet compoſitam ex intermediis rationibus, AVT ad ATS, ATS ad ASG, ASG ad AGR, AGR ad ARP, & ARP ad AP*a* (omnibus majoris inæqualitatis) quarum prima, tertia, & quinta (aliæque impari loco poſitæ ſi plures fuerint) æquantur ſemper *ex lemm.* 13. rationi *m* ad 1. quæ ſimul compoſitæ eandem rationem multiplicant juxta acceptum numerum punctorum P, G, T, adeoque ex ſe ſolis conflarent rationem *rm* ad 1. ideſt æqualem, aut proximè majorem ratione Z ad AP*a*, patet utique, rationem AVT ad AP*a*, quæ ex recenſitis, & inſuper ex ſecunda, quarta, aliiſque pari loco poſitis componitur, longè majorem eſſe ratione Z ad AP*a*, ideoque ſpatium AVT multò majus fore propoſito ſpatio Z.

Sin autem fuerit *m* [*ut in figura ſequenti*] minor quàm 1, tunc ipſa P*a* ducatur parallela DO, & ratione 1 ad *m* viciſſim multiplicata, uſque dum fiat ratio *r* ad *m* æqualis, aut proximè major ratione Z ad AP*a*, continuetur

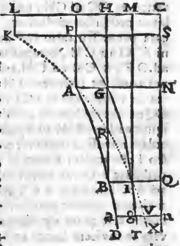
in

in totidem punctis flexilineū *a*PRQSTV ex lineis alternatim parallelis ad asymptotos, & eodem ratiocinio colligetur, spatium ATV ad AP*a* majorem rationem habere, quàm Z ad AP*a*, quia solæ rationes ATV ad ATS, nec non AGS ad AGR, & APR ad AP*a* [singulæ *ex lemm.* 13. æquales rationi 1 ad *m*] componerent rationem *r* ad *m*, multiplicatam scilicet ipsius 1 ad *m*, pro numero punctorum P, G, T. Quare constat, in hoc etiam casu, ex bilineo RAP secari posse spatium TAV majus qualibet finita magnitudine proposita Z. Quod erat &c.

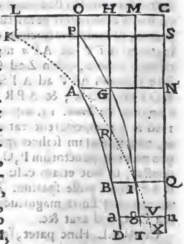


COROLL. Hinc patet, spatium hyperbola Apolloniana ARV, & quavis alia APT interceptum, esse magnitudinis absolutè infinitæ, potest enim ad finitum spatiū AP*a* rationem habere majorem qualibet assignabili.

LEMMA XV. *Sit hyperbola Apolloniana* A I V, *& alia quælibet* A B a D, *cujus ordinatarū* AN, an *potestates, per numerum* m (*unitate majorem*) *denominatæ, reciprocè respondeant abscissis* n C, NC: *tum per sectionem quarumvis asymptoto parallelarum* AO, BH, *in punctis* P, G, *in qualibet assignabili ratione, putà* f *ad* 1, *fiat hyperbola* PGT *ipsi* ABaD *proportionaliter analoga. Dico,* PGT *convenire alicubi, velut in* I, *cum Apolloniana hy-*



na hyperbola AIV, & *ulterius productam eam ſecare*:



Ordinata PS occurrat Apollonianæ hyperbolæ in K, & ducta KL aſymptoto parallela, fiat, ut $m - 1$ ad 1, ita quadrilineum hyperbolicū OLKA ad OAIM, reſectum pariter recta MI aſymptoto CQ parallela; cùm igitur illud ſpatium ad hoc (*lemm.* 6.) ſit, ut ratio duarum LC, CO; ſive AO, OP, nempe f ad 1, ad rationem duarum OC, CM, erit, ut $m - 1$ ad 1, ita ratio f ad 1 ad rationem OC ad CM, & componendo, ut m ad 1, ita compoſita ratio ex f ad 1, & OC ad CM (nempe ratio fOC ad CM) ad ipſam rationem OC ad CM; unde productum extremorum æquabitur producto mediorum, ideſt poſterior ratio multiplicata per m ſeu ratio $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$ æquabitur ſimplici rationi fCO ad CM, compoſitæ ſcilicet ex f ad 1, ſive AO ad OP, & CO ad CM, aut IM ad AO, quæ duæ rationes conſtant rationem IM ad OP: ſed ut $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$, ita ex natura curvæ PGT eſt etiam MI, quę ex M aſymptoto CQ parallela uſque ad curvam PGT ducitur, ad eandem OP; igitur eadem eſt IM ad Apollonianam, & MI ad hanc hyperbolam noviſſimè ductam; quare utraque hæc curva in puncto I conveniet; deinceps autem, $\overline{QI}^m$ ad $\overline{gu}^m$ [poſita ug ordinata ad hanc hyperbolam PIT, uV verò ordinata ad Apollonianam ARV] ſeu uC ad CQ, vel QI ad uV, majorem habebit rationem, quàm QI ad gu, & ideò uV minor erit quàm ug, quare manifeſtum eſt, utramque curvam ſe invicem ſecare in I; & curvam PGI ex interiori

fieri exteriorem Apollonianæ hyperbolæ. Quod &c.

His positis, atque attentiùs perspectis, facillimè demonstrabitur præcipuum nostrum.

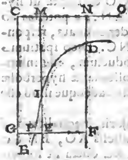
THEOREMA.

Cujuslibet hyperbola Apolloniana altioris, spatium asymptoticum est Plusquam : Infinitum *censendum.*

Intelligatur ARIVX hyperbola Apollonii, & per idem punctum intra easdem asymptotos QCO descripta sit hyperbola quælibet, cujus ordinatarum AN, *an* potestas ab exponente *m*, qui major sit unitate, denominata, respondeat abscissis reciprocè acceptis *n*C, NC. Dico spatium *n*COABD, ad partes D infinitè productum, esse infinities majus spatio absolutè infinito Apollonianæ hyperbolæ *n*COARV æquè in infinitum producto: adeoque illud esse *Plusquam Infinitum*.

Assignetur enim quælibet ratio majoris inæqualitatis, *f* ad 1; & singulis asymptoto CQ parallelis AO, BH &c. in tali ratione sectis ad puncta P, G &c. ducta sit hyperbola PGT, priori ABD proportionaliter analoga, quæ [*lemm.* 15.] secabit Apollonianam hyperbolam alicubi, velut in I; bilineum autem VIT (*per coroll. lemm.* 14.) erit absolutè infinitum, adeoque infinities majus terminato spatio PGIRA; & apposito communi spatio *n*COPGIVX, fiet *n*COPGI*g*T absolutè majus spatio *n*COARIVX; & ideo spatium NCOAB*a*D majorem habebit rationem ad hoc secundum, quàm ad illud primum: sed ad illud (ob proportionalem singularum parallelarum QA, HB sectionem ad P, G in ratione *f* ad 1) est in assignabili quavis ratione *f* ad 1; ergo ad hoc secundum rationem habet majorem qualibet assignabili; infinities igitur ipsum superat, adeoque est *Plusquam Infinitum*. Quod erat demonstrandum.

Nunc ad ſcrupulos tuos excutiendos accedo. Illud in primis opponis, quomodo fieri poſſit, ut omne aſymptoticum ſpatium, velut CNDIB, infinities minus aſſeri poſſit circumſcripto parallelogrammo CNF, ut ego ſæpius aſſerui: cùm tamen, ſi intelligatur Vas priſmaticum datæ altitudinis æqualis CN, baſim habens ipſum aſymptoticum ſpatium, aqua, vel alio fluido repleri, tum amota curva ſponda DIB, permittatur aqua fluere uſque ad ſpondam NF alteri CG parallelam, adeo ut adaptetur priſmati, baſim nunc habenti parallelogrammũ infinitè longum CNF, conſequens videatur, ut ad aliquam altitudinem, ſi non æqualem priori, ſaltem in aliqua ad ipſam ratione aſſignabili, eadem aqua aſſurgat, ne dicere cogamur, infinitam molem aquæ vix ſufficere ad madefaciendam duntaxat infinitè longi parallelogrammi ſuperficiem, nec tantam eſſe, ut ſupra fundum vaſis CNF vel tantillum elevetur, quod abſurdum ab omnibus cenſendum fore arbitraris. Ad hæc, ſi in parallelepipedum, ſuper determinato quadrato CN in longitudinem infinitam erectum, aquam illam, quæ prius intra priſma finitæ altitudinis CN, ſed infinitam aſymptoticam aream pro baſi obtinens, concludebatur, immiſſam concipiamus, utique ad infinitam altitudinem fore elevandam obſervas, adeoque congruere poſſe priſmati, baſim habenti infinitum parallelogrammum, finitam verò altitudinem, & ſic non eſſe cenſendum aſymptoticum ſpatium infinities minus parallelogrammo circumſcripto. Poſtremò auctoritatem neſcio, an rationem Cl. V. Galilæi obiicere identidem non prætermittis, quippe qui *Dial. 1. de nova ſcientia* non poſſe invicem comparari infinitas magnitudines, exemplo radicum, quadra-



torum,

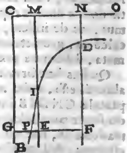
torum, ac cuborum ex omnibus numeris selectorum evincit, unde vocabula *majoris*, *minoris*, & *æqualis* locum non habere in Infinitis statuit, eoque minùs admissurum hæc nostra *Plusquam Infinita* arbitraris, qui ne rationem quidem assignabilem in ejusdem generis Infinitis agnoscit: unde sæpius repetis, cavendum, ne mirum in modum hallucinemur, dum tam audacter infinitas quantitates, finitæ nostræ mentis captum excedentes, versare non dubitamus, ac de iisdem, perinde ac de finitis, per analyticos calculos, geometricos discursus, ac figurarum diagrammata, discurrere præsumimus.

Quibus hæc breviter posse reponi observo. Primò nihil absurdi esse, quòd aqua illa, quæ vas prismaticum asymptotale CNDIB implebat, applicata Vasi parallelepipedo super parallelogrammo CNF erecto, vix ejus fundum madefaciat, nec ad ullam finitam altitudinem à sua basi elevetur, sed tantùm ad infinitè parvam; adeout quàm infinities minus est spatium asymptoticum CNDIB circumscripto parallelogrammo CNF, tam infinities minor sit reciprocè altitudo, ad quam in hoc parallelepipedo assurget aqua, altitudine CN prioris prismatis, ut generatim in omnibus solidis æqualibus contingere necesse est: ac demum illud idem in hoc casu dicendum esse, quod quis diceret, si ex finito aliquo, quantumvis magno, aquarum receptaculo, putà ex toto oceano, effundi intelligeretur aqua in immensam planitiem, seu superficiem infinitam; cui adhærendo, certè non posset in ullam datam altitudinem elevari, sed illam vix humectaret: eodem quippe modo finitum oceani fundum se habet ad immensam planitiem, ut infinita area asymptotica ad circumscriptum parallelogrammum, quod illa ostenditur infinities majus.

Secundò, si aqua illa replens prismaticum Vas asymptotale, infunderetur parallelepipedo basim habenti da-

tum

tùm quadratum rectę CN, ſed interminatam altitudinem, utique intra illud ad altitudinem infinitam erigeretur, ſed tamen infinities minorem, quàm ſit longitudo ſpatii aſymptotici: nimirum ſi area aſymptotica fuerit hyperbolæ Apollonianæ, erit altitudo priſmatis æqualis infinito axi Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ, ſubtangentem habentis æqualem ipſi NC lateri quadrati hyperbolico ſpatio inſcripti: nam ejuſmodi ſpatium aſymptoticum ſæpius oſtendimus æquari rectangulo ex dicta NC in axem præfatum Logiſticæ, ut quævis aſymptotici ſpatii terminata portio æquatur rectangulo ejuſdem NC in rectam axi Logiſticæ parallelam, ejuſque curvę, & aſymptoto hyperbolæ interpoſitam; itaque cùm dicimus, ſpatia hujus generis aſymptotalia eſſe infinities minora rectangulo quovis infinitè longo, intelligendum eſt de longitudine æquè infinita, ac ſit longitudo dicti ſpatii: ſeu de rectangulo ipſi circumſcripto, & qualibet ejus parte proportionali, per ſubdiviſam illius latitudinem reſecta: non autem id aſſerimus de quovis infinito rectangulo indiſcriminatim. Vide Scholion I. ſubiectum *coroll.* 2. *prop. IX. pag.* 59. hujus tractatus.



Tertiò ad Galilæi ſive auctoritatem, ſive rationem, reſpondeo, me nullatenus dubitare, ſi viveret nunc temporis Vir Clariſſimus, & tot Illuſtrium Mathematicorum, qui hos diverſos infinitorum gradus mecum agnoſcunt, fundamenta perpenderet, inſignemque hujus doctrinæ uſum in geometricis, & phyſicis problematibus ſolvendis agnoſceret, aut eorum auctoritati & rationi ſuam liberè, & ſyncerè poſtpoſiturum, aut ſaltem fore, ut mirabilia hæc profundioris Geometriæ arcana, ſin minùs probaret, certè debita veneratione ſuſpiceret, eoque loco haberet, quo

ſua

ſua Paradoxa de puncto æquali peripheriæ, aliiſque hujuſmodi, habenda eſſe à cæteris Mathematicis voluit. Cæterùm, re maturiùs, atque attentiùs penſata, fortaſſe Vir Lynceus animadverteret, ex omnibus poſſibilibus numeris, nedum plures, ſed infinities plures eſſe radices, quàm quadratos; & adhuc infinities plures quadratos eſſe, quàm, cubos, & ſubinde ſemper infinities minorem eſſe multitudinem altiorum poteſtatum: quemadmodum & facilè colligeret, omnium prorſus numerorum multitudinem eſſe duplam multitudinis imparium dumtaxat, vel dumtaxat parium numerorum; itemque eandem omnium numerorum multitudinem triplam eſſe illorum multitudinis, quos ternarius numerare poteſt; &c. Ad rationem verò dubitandi, an non totidem cenſendi ſint quadrati, aut cubi, quot radices &c. cùm cuilibet radici ſuum reſpondeat quadratum, & ſuus cubus: itemque an non totidem ſint omnes prorſus numeri, quot ſoli pares, aut ſoli illi, qui à ternario numerantur, cùm cuivis prorſus numero ſuus duplus (qui par eſt) poſſit aſſignari, itemque ſingulis correſpondeat ſuus triplus [quem ideò ternarius metitur] &c. ipſummet reſponſurum arbitror, hæc omnia falſa eſſe, ſi ad æqualem terminorum numerum cujuſvis generis numerorum ſeries prorogari intelligatur: ut enim ab 1 ad 10, vel ad 100, vel ad 1000. &c. ſemper falſum eſt tot eſſe radices, quot quadrata, quot cubi, quot pares numeri, quot à ternario numerati, etenim quos Galilæus ait aſſignari poſſe ſingulis radicibus quadratos, cubos, itemque duplos, & triplos &c. extra ſeriem acceptam exiſtere certum eſt: ita etiam ſi in multitudine majori qualibet data, juxta ejuſdem infinitatis progreſſum, numeri infiniti accipiantur, falſum erit, totidem in ipſis radices, quot quadratos, & cubos, & per binarium, & per ternarium diviſibiles poſse aſſignari, qui enim ſic correſponderent (præter paucos in accepta ſerie contentos) ultra terminum aſsumptarum radicum

eum, extra progreſſionem, forent aſsumendi, quemadmodum ultra denarium excurrunt numeri quadrati, & cubi, & dupli, & tripli eorum qui ab 1 ad 10 computantur; & ultra centenarium ſunt qui ſimiliter reſpondent ſingulis numeris intra centenarium concluſis; atque ita deinceps; Itaque ratio non deeſt, cur crederemus, ipſummet Galilæum facilè admiſsurum, quòd infinita omnem æqualitatis, & inæqualitatis majoris ac minoris, ipſamque altiorum graduum varietatem induere poſsint, neque ægrè laturum, ut inditam nobis à Deo Opt. Max. Infiniti ideam; quoad fieri poteſt, aſſiduè contemplemur, ejuſdemque Auctoris noſtri infinitam eſſendi plenitudinem, immenſam, interminatam, incircumſcriptam, Sapientiæ, Potentiæ, Bonitatiſque magnitudinem, per hæc ænigmata, interim admirantes, dum paulatim ad deſpiciendas haſce finitas res & caducas animum erudientes, ad illud *Infinitorum, & Pluſquam Infinitorum omnium Maximum*, ſine extenſione immenſum, ſine ſucceſſione perpetuum, ſine multitudine infinitum, omnis extenſionis originem, omnis ſucceſſionis fontem, omnis infinitatis principium, evidentiori intuitu, facie ad faciem, aliquando perſcrutandum aſpiramus. Hæc una jucundiſſima contemplatio, per interminabilis ævi ſeriem mentes noſtras jugiter occupabit, hæc una beatos efficiet: cur itaque dubitabimus hæc infinitatis noſtri Auctoris veſtigia, in admirandis operibus ſuis relicta, has ejus magnitudinis velut umbras, & ſpectra, nobis in his tenebris occurrentia, quoad licuerit, perſequi, ſiquam inde veritatis lucem eruentes, futuræ fœlicitatis ſpecimen aliquod prægustare poſſimus?

Quod porrò ex rerum finitarum propietatibus, et undique circumſcriptis figuris, de Infiniti natura, deque immenſis ſpatiis pronunciare non vereamur, id extra reprehenſionem eſse intelliges, ſi ex ipſis creaturis, utique finitis, exiguis, et limitatis, ad ejuſdem Creatoris noſtri,

Maxi-

Maximi, Infinitique notitiam ascendere nos debere animadvertas, & ex earum dotibus, quàmlibet imperfectis, summi Opificis infinitas perfectiones colligere, dum *Invisibilia Dei, per ea quæ facta sunt, intellecta conspiciuntur*, ut monuit Apostolus. Ad hæc: tibi ipsi, ac vulgo philosophorum potius cavendum est, ne te præjudicio aliquo falli permittas, dum ab Infinito Finitum omne toto genere distingui putas, ut alterum cum altero conferri nequeat; magnitudinum quippe finitarum divisibilitas in infinitum, tot physicis, & geometricis argumentis demonstrata, & apud sapientes omnes jam inconcussa, arguit ipsasmet ad quoddam Infiniti genus pariter pertinere, tametsi, quia nobis ordinariè tractandæ occurrunt, ab Infinitis secerni, & peculiari nomine Finitorum designari consueverint. Quævis materiæ particula, si doctissimum Leibnitzium audias, infinita est, non potestate dumtaxat, sed actu ipso, ut Scholæ loquuntur: en ejus verba ex Epistola ad D. Foucher Canonicum Divionensem in Diario Parisiensi 3. Augusti 1693. *Je suis tellement pour l' infini actuel, qu' au lieu d' admettre que la nature l' abhorre, comme l' on dit vulgairement, je tiens qu' elle l' affecte par tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu' il n' y a aucune partie de la matiere, qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; & par consequent la moindre particelle doit estre considerée comme un monde plein d' une infinité de creatures differentes.* Quæ si vera, aut veris similia censeantur, quis vetet imposterum de finitis magnitudinibus, perinde ac de infinitis, & è contrario de infinitis, perinde ac de finitis, discurrere, cùm uno genere uterque magnitudinum ordo veluti comprehendatur? Præterquamquod ipse nostrarum demonstrationum progressus apertè ostendit, debitas cautiones à nobis minime prætermissas, prout rerum ferebat conditio, cùm ex rationibus finitarum quantitatum, ad ipsas infinitas vel invicem, vel cum infinities majoribus, aut

minoribus comparandas gradum faceremus.

Cæterùm quæ mihi obiecisti Trevoltiensium Sociorum, qui monumenta Scientiarum, ac bonarum Artium perscribunt, testimonia, nostræ causæ non admodum officere judico. Ajunt illi artic. 33. mensium Maii, & Junii anni 1701 in recensione Methodi Jacobi Bernoullii ad determinandos evolutarum radios ,, *Analysim infinitè parvorum [juxta phrasim D. Hospitalii] in ipsinsmet Infiniti viscera penetrare, nec Infinitum dumtaxat complecti, sed Infinitum infiniti, aut etiam infinitorum Infinitatem: at optandum esse, ut ejusmodi Analysis, quam contendunt fecunditate admirabili prædıtam, tantam evidentiam secum afferret, quantam à Geometria jure expectamus: Sed cùm audiuntur differentes de Infinito, deque Infinito infiniti, ac de Infinito infinities infiniti, atque ita deinceps sine limite progrediendo, cùmque finitis magnitudinibus hæ infinitorum Infinitates applicantur, non semper contingit, eos quos erudire, atque ad assensum cogere conantur, tanta ingenii vi præditos esse, quanta requireretur, ut in adeo profundis abyssis recondita mysteria discernere queant* ,, & infra sub finem ,, *Qui antiquis Geometrarum ratiocinııs assueti sunt, non nisi agrè ab iis se avelli patientur, ut tam abstractas methodos prosequantur: ac facilè malint non adeò longè progredi, quàm novas vias ingredi ad Infinitum infinities infiniti ducentes, in quibus non adeò claram circa se lucem semper aspicient, ac satis obvio aberrandi periculo se frequenter obnoxios sentient. Non sufficit in rebus geometricis rectè concludere, nisi & legitimam esse illationem evidenter nobis innotescat.* ,,

In quibns patet, non improbari quidem ipsammet infinitè parvorum Analysim, nec doctrinam infinities infinitorum, velut erroris suspectam, traduci, sed unum hoc querelæ subiectum esse, quòd non satis clarè, & evidenter ab hujus methodi cultoribus hæc omnia tradantur, sed magni alicujus mysterii ad instar, intricatioris calculi velo involuta proponi consueverint; quod fortasse in nostro

tra-

tractatu culpare non poterunt, in quo dilucidè, ut arbitror, atque ex feveriori Geometrarum methodo demonftrata omnia deprehendent. In eam quippe fententiam & nos fponte concedimus, optandum effe, ut quæ per analyticum calculum inveniuntur, ad geometricam potius amuffim exacta, fi fieri poteft, proponantur, quàm ut per fymbola, multiplici præfertim exponentium gradu, & radicum implicatarum fignis affecta, implicentur, ex quibus non ftatim, uno velut intuitu, quemadmodum ex linearibus demonftrationibus, veritatem expofitorum Theorematum Lector elicere poteft, fed longum ejufdem calculi fibimet repetendi tędium fubire cogitur, àntequàm certam propofitæ rei notitiam fibi comparet, non minori plerumque labore, quàm fi ab initio eidem veritati ex integro per femetipfum indagandæ animum applicuiffet.

Hæc habui, quæ difficultatibus tuis pro nunc reponerem: fiquid exinde lucis haurire poteris, ea fruere; fiquid verò obfcurius, præ argumenti ipfius conditione, dictum invenies, id quam primùm, fincera, qua invicem utimur, libertate indicare ne prætermittas, congruam ex me dilucidationem, fuo tempore, reportaturus.

Vive, vale; & fiquid novifti rectius iftis,
Candidus imperti: fi non, his utere mecum.

Dabam Aretii Kalendis Septembris MDCCIX.

„ DOMINUS REGNABIT IN ÆTERNUM, ET ULTRA „
Exod. cap. 15. *v.* 18.

FINIS.

AP-

APPROBATIONES.

DE Mandato Reverendiss. Patris D. Alphonsi Collini Abbatis Generalis totius Ordinis Camaldulensis, attente legi librum, qui inscribitur: *De Infinitis Infinitorum, & infinitè parvorum ordinibus &c.* à P. D. Guidone Grando Monacho Camaldulensi Celebri Mathematico, & Pisanæ Universitatis Publico Philosophiæ Professore compositum, nihilque in eo tam Catholicæ Fidei, quam bonis moribus dissonum inveni; quinimmo Opus profundioris Geometriæ meditationibus, Infiniti ipsius Naturam, æquè ac differentialis Calculi Methodum illustrantibus, refertum, & tanto Auctore dignum, & Mathematicæ studiosis perutile futurum censeo, si typis mandetur.

Dat. Arretii ex Monasterio S. Mariæ in Gradibus die 14. Septembris 1709.

D. Antonius Franciscus Caramelli S. Theolog. Doctor, Abbas dicti Monasterii, & Visitator Camaldulensis.

CUm librum, cui titulus est: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitè parvorum ordinibus*, à P. D. Guidone Grando Monacho nostro compositum recognoverit Reverendissimus P. D. Antonius Franciscus Caramelli Abbas Visitator (cui hoc ipsum commissum fuit) & censuerit in lucem edi posse, Nos facultatem Auctori præfato elargimur, ut eundem librum typis mandare valeat, si cęteris, ad quos spectat, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscripsas, ac Sigillo Nostro munitas dedimus.

Ex Monasterio Nostro SS. Hyppoliti, et Laurentii Faventię die 1. Octobris 1709.

D. Alphonsus Abbas Generalis Camald.

Locus ✠ Sigilli. *D. Marinus Miserochi Cancell. Camald.*

IMPRIMATUR.

Frater Carolus Antonius Panni de Cremona Ord. Min. Conv. Vicarius Generalis Sanctæ Inquisitionis Pisarum.

Imprimatur Pisis.

Anton. Francisc. Palmerini V. Generalis.

APPROBATIONES.

DE Mandato Reverendiss. Patris D. Alphonsi Cellini Abbatis Generalis totius Ordinis Camaldulensis, attente legi librum, qui inscribitur: *De Infinitis Infinitorum, & infinitè parvorum ordinibus &c.* à P. D. Guidone Grando Monacho Camaldulensi Celebri Mathematico, & Pisanæ Universitatis Publico Philosophiæ Professore compositum, nihilque in eo tam Catholicæ Fidei, quàm bonis moribus dissonum inveni; quinimmò Opus profundioris Geometriæ meditationibus, Infinitis ipsius Naturam, æquè ac differentialis Calculi Methodum illustrantibus, refertum, & tanto Auctore dignum, & Mathematicæ Studiosis perutile futurum censeo, si typis mandetur.

Dat. Aretii in Monasterio S. Mariæ in Gradibus die 15. Septembris 1709.

D. Antonius Franciscus Caramelli S Theolog Doctor, Abbas dicti Monasterii, & Visitator Camaldulensis.

CUm librum, cui titulus est: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitè parvorum ordinibus*, à P. D. Guidone Grando Monacho nostro compositum recognoverit Reverendissimus P. D. Antonius Franciscus Caramelli Abbas Visitator (cui hoc ipsum commissum fuit) & censuerit in lucem edi posse, Nos facultatem Auctori præfato elargimur, ut eundem librum typis mandare valeat, si cæteris, ad quos spectat, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscripsas, ac Sigillo Nostro munitas dedimus.

Ex Monasterio Nostro SS. Hyppoliti, et Laurentii Faventiæ die 1. Octobris 1709.

D. Alphonsus Abbas Generalis Camald.

Locus ✠ Sigilli.

D. Marinus Miserochi Cancell. Camald.

IMPRIMATUR.

Frater Carolus Antonius Panni de Cremona Ord. Min. Conv. Vicarius Generalis Sanctæ Inquisitionis Pisarum.

Imprimatur Pisis.

Anton. Francisc. Palmerini V. Generalis.